詳細解答

STEP II 1994，第 7 題

純數學 • 阿波羅尼奧斯圓

> **STEP II 1994，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/94-s2-q7

關鍵思路

從距離 r 處觀看高度為 h 的旗杆頂，仰角（angle of elevation）的正切是 h/r，所以「仰角相等」其實只是說：士兵與兩個杆腳的距離保持固定比 $h_1 : h_2$。把這個條件兩邊平方，得到的方程正好是第一部分的形式，因此軌跡（locus）是一個圓（即阿波羅尼奧斯圓（circle of Apollonius））。至於最後一部分，把旗杆放在一般位置，並把每個圓心寫成兩個杆腳的加權組合；恆等式便自然得出，而且其係數之和為零，正是這一點保證了三點共線（collinear）。

解答

圓

由於 $a > 0$，我們可以除以 a，然後配方（complete the square）：

$$x^2 + y^2 + \frac{2g}{a}x + \frac{2f}{a}y + \frac{c}{a} = 0 \iff \left(x + \frac{g}{a}\right)^2 + \left(y + \frac{f}{a}\right)^2 = \frac{g^2 + f^2 - ac}{a^2}.$$

因為 $f^2 + g^2 > ac$，右邊是正數，所以這是一個圓，其

$$\text{圓心為} \left(-\frac{g}{a}, -\frac{f}{a}\right), \qquad \text{半徑為} \frac{\sqrt{g^2 + f^2 - ac}}{a}.$$

（若沒有這個條件，這個「圓」便會是單獨一點，或者是空集。）

兩支旗杆

把高度為 h_1 的旗杆的杆腳放在原點，另一支的杆腳放在 $(d, 0)$。若士兵位於 (x, y)，與兩個杆腳的距離分別是 r_1 和 r_2，則仰角 θ_1, θ_2 滿足 $\tan\theta_i = h_i / r_i$。兩個角都在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 之

內，而 tan 在這個區間上是一對一（one-to-one）的，所以

$$\theta_1 = \theta_2 \iff \frac{h_1}{r_1} = \frac{h_2}{r_2} \iff h_2^2 r_1^2 = h_1^2 r_2^2,$$

最後一步可以逆推，因為所有量都是正數。（士兵不可能站在杆腳上：$r_1 = 0$ 會迫使 $r_2 = 0$ 同時成立。）所以路徑是

$$h_2^2(x^2+y^2) = h_1^2((x-d)^2+y^2) \iff (h_2^2 - h_1^2)(x^2+y^2) + 2h_1^2 d\,x - h_1^2 d^2 = 0.$$

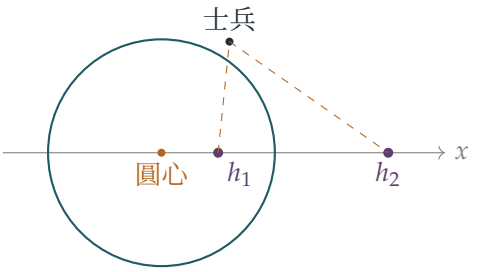
為旗杆編號，使得 $h_2 > h_1$（若兩者高度不同，總有一支較高）。這樣，上式就是第一部分的方程，其中

$$a = h_2^2 - h_1^2 > 0, \quad g = h_1^2 d, \quad f = 0, \quad c = -h_1^2 d^2,$$

而且

$$g^2 + f^2 - ac = h_1^4 d^2 + (h_2^2 - h_1^2) h_1^2 d^2 = h_1^2 h_2^2 d^2 > 0.$$

所以士兵沿着一個圓步操，圓心為 $\left(-\dfrac{h_1^2 d}{h_2^2 - h_1^2}, 0\right)$，半徑為 $\dfrac{h_1 h_2 d}{h_2^2 - h_1^2}$。圓心位於通過兩個杆腳的直線上，在較矮旗杆的外側。這個圓圍繞着較矮的旗杆，這很合理：要令矮杆看起來與高杆一樣高，就必須站得離它近一些。



（圖中取 $h_1 = 1$，$h_2 = 2$，$d = 3$：圓心是 $(-1, 0)$，半徑是 2。）

若 $h_1 = h_2$，$x^2 + y^2$ 的項互相抵消，方程變成 $2h_1^2 d\,x = h_1^2 d^2$，即 $x = \frac{1}{2}d$。士兵沿着連接兩個杆腳的線段的垂直平分線（perpendicular bisector）行走，那是一條直線而不是圓。這正是上述各圓的極限情況：當 $h_2 \to h_1$ 時，半徑趨向無限大。

三支旗杆

現在我們無法把三個杆腳全部放在同一條坐標軸上，所以設高度為 h_i 的旗杆立於 $\mathbf{p}_i = (p_i, q_i)$。以 $r_i^2 = (x-p_i)^2 + (y-q_i)^2$ 重複上面的論證，負責旗杆 i 和 j 的士兵所走的路徑是

$$(h_j^2 - h_i^2)(x^2+y^2) - 2(h_j^2 p_i - h_i^2 p_j)x - 2(h_j^2 q_i - h_i^2 q_j)y + \text{常數} = 0.$$

這是一個圓（移動原點不會改變 g^2+f^2-ac 的值，所以它仍然是 $h_i^2h_j^2|\mathbf{p}_i-\mathbf{p}_j|^2>0$；若 $h_j<h_i$，則先把全式乘以 -1）。利用第一部分，其圓心 $\mathbf{c}_{ij}=(x_{ij},y_{ij})$ 滿足

$$(h_j^2-h_i^2)\,\mathbf{c}_{ij}=h_j^2\mathbf{p}_i-h_i^2\mathbf{p}_j.$$

把 i 和 j 對調，這條式子不變（兩邊同時變號），所以 $\mathbf{c}_{31}$ 的下標次序怎樣寫都沒有關係。

想一想 怎樣不必解出任何未知量，就把三條這樣的公式變成題目給出的恆等式？

恆等式中每一項在 x_{ij} 旁邊都已經有因子 $\pm(h_j^2-h_i^2)$，所以我們可以直接代入上面的公式，並使用向量，把 x 坐標和 y 坐標一併處理：

$$\begin{aligned}
h_3^2(h_1^2-h_2^2)\,\mathbf{c}_{12}&=-h_3^2(h_2^2\mathbf{p}_1-h_1^2\mathbf{p}_2)=-h_2^2h_3^2\,\mathbf{p}_1+h_1^2h_3^2\,\mathbf{p}_2,\\
h_1^2(h_2^2-h_3^2)\,\mathbf{c}_{23}&=-h_1^2(h_3^2\mathbf{p}_2-h_2^2\mathbf{p}_3)=-h_1^2h_3^2\,\mathbf{p}_2+h_1^2h_2^2\,\mathbf{p}_3,\\
h_2^2(h_3^2-h_1^2)\,\mathbf{c}_{31}&=\;\;h_2^2(h_3^2\mathbf{p}_1-h_1^2\mathbf{p}_3)=\;\;h_2^2h_3^2\,\mathbf{p}_1-h_1^2h_2^2\,\mathbf{p}_3.
\end{aligned}$$

三式相加，各項兩兩抵消，所以

$$h_3^2(h_1^2-h_2^2)\,\mathbf{c}_{12}+h_1^2(h_2^2-h_3^2)\,\mathbf{c}_{23}+h_2^2(h_3^2-h_1^2)\,\mathbf{c}_{31}=\mathbf{0}.$$

其 x 分量就是所求的 x_{ij} 之間的關係式，而 y 分量則是 y_{ij} 之間的同一關係式。

想一想 為甚麼三點之間有一個線性關係，就能令它們共線？

把三個係數記為 $A=h_3^2(h_1^2-h_2^2)$，$B=h_1^2(h_2^2-h_3^2)$，$C=h_2^2(h_3^2-h_1^2)$。各高度都是正數而且互不相同，所以 A,B,C 全都不是零。關鍵的額外事實是它們的和為零：

$$A+B+C=h_1^2h_3^2-h_2^2h_3^2+h_1^2h_2^2-h_1^2h_3^2+h_2^2h_3^2-h_1^2h_2^2=0.$$

所以 $C=-A-B$，關係式變成

$$A(\mathbf{c}_{12}-\mathbf{c}_{31})+B(\mathbf{c}_{23}-\mathbf{c}_{31})=\mathbf{0},\qquad\text{所以}\qquad\mathbf{c}_{12}-\mathbf{c}_{31}=-\frac{B}{A}\,(\mathbf{c}_{23}-\mathbf{c}_{31}).$$

由 $\mathbf{c}_{31}$ 指向另外兩個圓心的向量互相平行（或者其中一個是零向量，若有兩個圓心重合），所以三個圓心位於同一條直線上。假如沒有 $A+B+C=0$，一個線性關係根本證明不了甚麼：任意三點都滿足某個這類的關係。

驗算

- 取 $h_1=1$，$h_2=2$，$d=3$，我們的公式給出圓心 $(-1,0)$ 和半徑 2。點 $(1,0)$ 與兩個杆腳的距離是 1 和 2，而 $(-3,0)$ 的距離是 3 和 6：兩者之比都是 $1:2$，正如所料。

- 我們做了一次數值檢驗：在每個圓上隨機取點，確認兩個仰角相等。此外，對 2000 組位置隨機的三支旗杆，也確認了恆等式成立，以及三個圓心共線。
- 預期共線的另一個理由：若某點同時在其中兩個圓上，則 $r_1 : r_2 = h_1 : h_2$ 且 $r_2 : r_3 = h_2 : h_3$，所以 $r_1 : r_3 = h_1 : h_3$，它也在第三個圓上。當這些圓相交時，它們全都通過相同的兩點，所以它們的圓心全都在這兩點的垂直平分線上。

常見錯誤

- 直接寫 $h_1/r_1 = h_2/r_2$，卻沒有說明為何仰角相等就得出正切相等（兩個角都是銳角）。
- 忘記檢查 $g^2 + f^2 > ac$：第一部分只在這個條件下才給出一個圓。
- 單憑恆等式就推斷共線，而沒有用到 $A + B + C = 0$ 和 $A, B, C \neq 0$。

STEP 之外

與兩個定點的距離成固定比 $k \neq 1$ 的點所組成的集合，是一個阿波羅尼奧斯圓。取遍 k 的所有值，便得到一個共軸圓系（*coaxal system*），即其中任意兩個圓都有相同根軸（radical axis）的一族圓。這類圓族正是反演幾何（inversive geometry）的起點；在複平面上，它們就是圓 $|z - a| = k|z - b|$，而莫比烏斯變換（Möbius transformation）會把這些圓互相映射。Coxeter 與 Greitzer 的 *Geometry Revisited*（重溫幾何）涵蓋共軸圓和反演；Needham 的 *Visual Complex Analysis*（視覺化的複分析）則展示複數方面的觀點。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。