詳細解答

STEP II 1994，第 6 題

純數學 • 三角函數裂項相消級數

> **STEP II 1994，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/94-s2-q6

關鍵思路

一切都建基於一條小小的恆等式（identity）：$\tan x = \cot x - 2\cot 2x$。它把和式中的每一項化為形如 $\frac{1}{2^r}\cot\frac{\theta}{2^r}$ 的相鄰兩項之差，於是和式可以裂項相消（telescope），而歸納步驟之所以行得通，靠的也正是這條恆等式。至於無窮和，只需用到極限（limit）$\frac{\sin\varphi}{\varphi}\to 1$。

解答

一條有用的恆等式

對任何使 $\sin x$、$\cos x$ 和 $\sin 2x$ 皆不為零的 x，

$$\cot x - \tan x = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x\cos x} = \frac{\cos 2x}{\frac{1}{2}\sin 2x} = 2\cot 2x,$$

所以

$$\tan x = \cot x - 2\cot 2x. \qquad (*)$$

我們只會在 $x = \theta/2^r$（其中 $r \geq 1$）的情況下使用 $(*)$。由於 $0 < \theta < \pi$，這樣的 x 必在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 之內，因此 $\sin x$、$\cos x$ 和 $\sin 2x$ 全為正數，我們寫下的每一個 tan 和 cot 都有定義。

以歸納法求有限和

以 S_n 表示左方 $\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{2^r}\tan\frac{\theta}{2^r}$，並設 $P(n)$ 為命題

$$S_n = \frac{1}{2^n}\cot\frac{\theta}{2^n} - \cot\theta.$$

基礎情況 $n = 1$。在 $(*)$ 中代入 $x = \theta/2$，再除以二：

$$S_1 = \tfrac{1}{2}\tan\tfrac{\theta}{2} = \tfrac{1}{2}\cot\tfrac{\theta}{2} - \cot\theta,$$

這就是 $P(1)$。

歸納步驟。假設 $P(k)$ 對某個 $k \geq 1$ 成立。在 $(*)$ 中代入 $x = \theta/2^{k+1}$，於是 $2x = \theta/2^k$，再除以 2^{k+1}：

$$\frac{1}{2^{k+1}}\tan\frac{\theta}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^{k+1}}\cot\frac{\theta}{2^{k+1}} - \frac{1}{2^k}\cot\frac{\theta}{2^k}.$$

把此式與 $P(k)$ 相加，

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + \frac{1}{2^{k+1}}\tan\frac{\theta}{2^{k+1}} \\ &= \left(\frac{1}{2^k}\cot\frac{\theta}{2^k} - \cot\theta\right) + \left(\frac{1}{2^{k+1}}\cot\frac{\theta}{2^{k+1}} - \frac{1}{2^k}\cot\frac{\theta}{2^k}\right) \\ &= \frac{1}{2^{k+1}}\cot\frac{\theta}{2^{k+1}} - \cot\theta, \end{aligned}$$

這就是 $P(k+1)$。根據數學歸納法（induction），$P(n)$ 對所有 $n \geq 1$ 和所有 $\theta \in (0, \pi)$ 成立，命題得證。

想一想 假如你從未見過恆等式 $(*)$，怎樣才能把它找出來？

從歸納法倒推回去。由 $n = k$ 到 $n = k+1$，右方的變化是 $\frac{1}{2^{k+1}}\cot\frac{\theta}{2^{k+1}} - \frac{1}{2^k}\cot\frac{\theta}{2^k}$，左方的變化是 $\frac{1}{2^{k+1}}\tan\frac{\theta}{2^{k+1}}$。乘以 2^{k+1} 並記 $x = \theta/2^{k+1}$，可見兩邊的變化相等，當且僅當 $\tan x = \cot x - 2\cot 2x$。換言之，題目本身已告訴你要證明哪一條恆等式；之後只需用倍角公式（double-angle formulae）驗證便可。

無窮和

各項全為正數，而且我們已有部分和（partial sums）的精確公式，所以只需求出 S_n 在 $n \to \infty$ 時的極限。設 $\varphi_n = \theta/2^n$，則 $\varphi_n \to 0^+$ 且 $\frac{1}{2^n} = \frac{\varphi_n}{\theta}$。於是

$$\frac{1}{2^n}\cot\frac{\theta}{2^n} = \frac{\varphi_n}{\theta}\cdot\frac{\cos\varphi_n}{\sin\varphi_n} = \frac{1}{\theta}\cdot\frac{\varphi_n}{\sin\varphi_n}\cdot\cos\varphi_n \longrightarrow \frac{1}{\theta}\cdot 1\cdot 1 = \frac{1}{\theta},$$

這裏用到了標準極限：當 $\varphi \to 0$ 時，$\frac{\sin\varphi}{\varphi} \to 1$ 及 $\cos\varphi \to 1$。由於 $\cot\theta$ 與 n 無關，

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{2^r}\tan\frac{\theta}{2^r} = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{\theta} - \cot\theta,$$

這正是所求的結果。特別地，此級數（series）對所有 $\theta \in (0, \pi)$ 均收斂（converge）。

想一想 為甚麼可以說「無窮和等於 S_n 的極限」？

這正是無窮級數之和的定義：$\sum_{r=1}^{\infty} a_r$ 的意思就是 $\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n} a_r$，前提是該極限存在。我們已把極限算了出來，從而證明它存在，所以毋須再做其他工夫。

驗算

- $\theta = \frac{\pi}{2}$：右方為 $\frac{2}{\pi} - 0 \approx 0.63662$。以數值方法把級數的首 60 項相加，同樣得到 0.6366198。
- $\theta = 1$：級數與 $1 - \cot 1$ 均得 0.3579074。
- θ 很小時：$\tan\frac{\theta}{2^r} \approx \frac{\theta}{2^r}$，所以級數約為 $\theta\sum 4^{-r} = \frac{\theta}{3}$。這與展開式 $\frac{1}{\theta} - \cot\theta = \frac{\theta}{3} + O(\theta^3)$ 吻合。
- 當 $\theta \to \pi^-$ 時，$\cot\theta \to -\infty$，而首項 $\frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2} \to +\infty$，所以兩邊同時趨向無窮大，正如所料。

常見錯誤

- 把 $(*)$ 中的因子 2 弄錯，例如寫成 $\tan x = \cot x - \cot 2x$。可用 $x = \frac{\pi}{4}$ 檢驗：$1 = 1 - 2\cdot 0$。
- 因為 $\frac{1}{2^n} \to 0$ 便聲稱 $\frac{1}{2^n}\cot\frac{\theta}{2^n} \to 0$。餘切的增長速度與 $2^n/\theta$ 相若，所以乘積趨向 $\frac{1}{\theta}$，而不是 0。
- 忘記說明為何各個正切和餘切都有定義：正是條件 $0 < \theta < \pi$ 確保每一個角 $\theta/2^r$ 都在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 之內。

STEP 之外

函數 $\frac{1}{\theta} - \cot\theta$ 屬於一個著名的家族：對部分分式展開（partial-fraction expansion）$\cot\theta = \frac{1}{\theta} + \sum_{k\geq 1}\frac{2\theta}{\theta^2 - k^2\pi^2}$ 求導，可得巴塞爾和（Basel sum）$\sum 1/k^2 = \pi^2/6$，而歐拉（Euler）正是從 $\sin\theta$ 的無窮乘積（infinite product）得出這類結果。對韋達（Viète）乘積 $\frac{\sin\theta}{\theta} = \prod_{r\geq 1}\cos\frac{\theta}{2^r}$ 取對數再求導，恰好得到本題的級數，這是理解此結果的另一途徑。如何令這類對無窮和與無窮乘積的運算變得嚴謹，是大學一年級分析（analysis）課程的課題；可參閱 Abbott, *Understanding Analysis*（一本數學分析入門教科書）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。