詳細解答

STEP II 1994，第 5 題

純數學 • 實根的計數

> **STEP II 1994，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/94-s2-q5

關鍵思路

要數 $f(x) = c$ 有多少個根（root），即是問水平線 $y = c$ 與 f 的圖像相交多少次，所以關鍵在於 f 的形狀：它在哪裏取最小值，在哪裏遞增、在哪裏遞減。本題的每個式子都由兩個關於某個中心點對稱的括號組成。把變量平移，使中心點變成原點，則奇次項互相抵消（四次方的情況）或偶次項互相抵消（三次方的情況），圖像的形狀便一目了然。

解答

第 (i) 部分

用二項式定理（binomial theorem）展開。在 $(x+1)^4$ 和 $(x-1)^4$ 中，x 的奇次項符號相反，所以相加時互相抵消：

$$f(x) = (x-1)^4 + (x+1)^4 = 2(x^4 + 6x^2 + 1) = 2x^4 + 12x^2 + 2.$$

因此 f 是偶函數（even function），而且 $f(x) = 2 + 2x^4 + 12x^2 \geq 2$，等號只在 $x = 0$ 時成立。對於 $x \geq 0$，當 $x > 0$ 時 $f'(x) = 8x^3 + 24x > 0$，所以 f 在 $[0, \infty)$ 上嚴格遞增（strictly increasing），而且當 $x \to \infty$ 時 $f(x) \to \infty$。由於 f 是連續（continuous）的，它在 $[0, \infty)$ 上取 $[2, \infty)$ 中的每個值恰好一次；根據對稱性，它在 $(-\infty, 0]$ 上亦然。

- 若 $c > 2$：恰有一個根 $x = a > 0$，於是 $x = -a$ 是第二個根；這兩個根互不相同，此外再無其他根。所以**恰好有兩個**實根。
- 若 $c = 2$：由 $f(x) = 2$ 必得 $2x^4 + 12x^2 = 0$，所以 $x = 0$ 是**唯**一的根。
- 若 $c < 2$：對所有 x 都有 $f(x) \geq 2 > c$，所以**沒有**根。

這正是題目所要求的結論。

（另一做法：$2x^4 + 12x^2 + 2 - c = 0$ 是關於 $u = x^2$ 的二次方程，其根為 $u = -3 \pm \sqrt{8 + c/2}$；只有取 $+$ 號的根才可能非負，而它是正數、零還是負數，分別對應 $c > 2$、$c = 2$ 和 $c < 2$。）

第 (ii) 部分

括號 $x - 3$ 和 $x - 1$ 以 $x = 2$ 為中心，所以設 $y = x - 2$。於是

$$(x-3)^4 + (x-1)^4 = (y-1)^4 + (y+1)^4,$$

這正是第 (i) 部分的式子，只是變量換成了 y。由於 $x \mapsto y = x - 2$ 是實數之間的一一對應（one-to-one correspondence），這個方程的實根數目與第 (i) 部分相同：

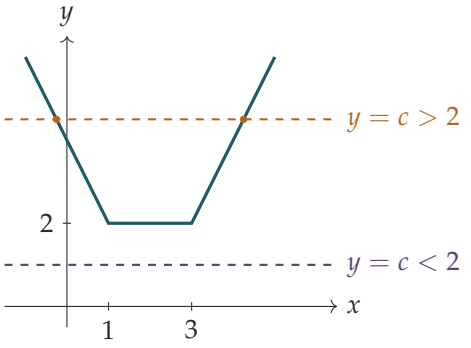
$$\text{有兩個根，若} c > 2, \qquad \text{有一個根} (x = 2)\text{，若} c = 2, \qquad \text{沒有根，若} c < 2.$$

第 (iii) 部分

設 $g(x) = |x - 3| + |x - 1|$，並在 $x = 1$ 和 $x = 3$ 所分出的三個區間上分別去掉絕對值（modulus）符號：

$$g(x) = \begin{cases} (3-x) + (1-x) = 4 - 2x, & x < 1, \\ (3-x) + (x-1) = 2, & 1 \le x \le 3, \\ (x-3) + (x-1) = 2x - 4, & x > 3. \end{cases}$$

所以圖像是一個平底的 V 形：在 1 與 3 之間恆等於 2，在左邊嚴格遞減，在右邊嚴格遞增，而且在 $[1, 3]$ 之外 $g > 2$。



- 若 $c < 2$：處處都有 $g(x) \ge 2 > c$，所以**沒有**根。
- 若 $c = 2$：凡滿足 $1 \le x \le 3$ 的 x 都是根，此範圍以外則沒有根，所以有**無窮多個**根。

- 若 $c > 2$：在 $[1,3]$ 內沒有根；在 $x < 1$ 上，由 $4 - 2x = c$ 得 $x = 2 - \frac{c}{2}$，由於 $c > 2$，它確實小於 1；在 $x > 3$ 上，由 $2x - 4 = c$ 得 $x = 2 + \frac{c}{2} > 3$。所以**恰好有兩個**根，即 $x = 2 \pm \frac{c}{2}$。

> ? **想一想** 為甚麼 $c = 2$ 時的答案與第 (ii) 部分相差這麼遠？

對於四次方，由於兩項都是嚴格凸（strictly convex）的，它們的和在中心點有唯一而尖銳的最小值。對於絕對值，當 x 在 1 與 3 之間移動時，其中一個距離增加多少，另一個距離便恰好減少多少，所以它們的和在整個區間上都保持為 2（即 1 與 3 之間的距離）。

第 (iv) 部分

同樣設 $y = x - 2$。對於三次方，互相抵消的是 y 的偶次項：

$$(x-3)^3 + (x-1)^3 = (y-1)^3 + (y+1)^3 = 2y^3 + 6y.$$

設 $h(y) = 2y^3 + 6y$。則對任意實數 y 都有

$$h'(y) = 6y^2 + 6 \geq 6 > 0$$

，所以 h 在整條實數線上嚴格遞增，因而每個值最多取一次。此外，當 $y \to \infty$ 時 $h(y) \to \infty$，當 $y \to -\infty$ 時 $h(y) \to -\infty$，而 h 是連續的，所以根據介值定理（intermediate value theorem），它取每個實數值至少一次。

因此，對**每一個**實數 c，方程都**恰好有一個**實根。

驗算

- 在中心點 $x = 2$，兩個四次方的式子都等於 $1 + 1 = 2$，與 $c = 2$ 的情況吻合，而且 $(2-3)^3 + (2-1)^3 = 0$。
- 在第 (iv) 部分，$c = 8$ 應給出 $x = 3$：的確 $0^3 + 2^3 = 8$，而取 $y = 1$ 時 $h(1) = 2 + 6 = 8$。
- 在第 (iii) 部分取 $c = 4$，根 $x = 0$ 和 $x = 4$ 分別給出 $3 + 1 = 4$ 和 $1 + 3 = 4$。

我們以數值方法確認了各展開式在隨機選取的點上成立，並對一系列 c 值（例如在 (i) 和 (ii) 中取 $c = 1.9$、2.5、100，在 (iv) 中取 c 由 -1000 至 5000），在細密的網格上數算每個函數減去 c 後的變號次數：所得次數分別是 0、2、2，以及恆為 1，與上述結論一致。

常見錯誤

- 在第 (iii) 部分 $c = 2$ 時答「一個根」或「兩個根」：整個區間 $1 \le x \le 3$ 上的點全都是根。
- 在第 (iv) 部分，只說三次方程「有一個或三個實根」，卻沒有判斷是哪一種情況。$h'(y) > 0$ 處處成立這一事實便足以定奪。
- 忘記檢查 $x = 2 - \frac{c}{2}$ 是否真的落在使用公式 $4 - 2x$ 的區域 $x < 1$ 之內。

STEP 之外

這裏的論證建基於兩個定理，大學第一門分析（analysis）課程會仔細證明它們：其一是介值定理（區間上的連續函數會取遍兩個函數值之間的每一個值），其二是導數為正的函數必定嚴格遞增，這可由中值定理（mean value theorem）推出。第 (iii) 部分亦讓你初嘗凸性（convexity）和 ℓ^1 距離的滋味：到兩點的距離之和，在連接這兩點的整條線段上都取得最小值。Abbott 的 *Understanding Analysis* 一書嚴謹地闡述了這些概念。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。