詳細解答

STEP II 1994，第 4 題

純數學 • 橢圓的面積

> **STEP II 1994，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/94-s2-q4

關鍵思路

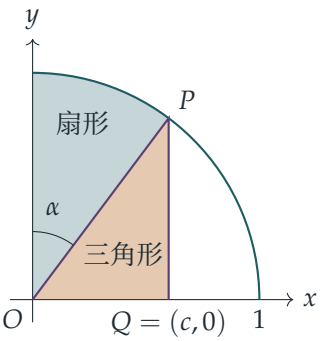
第一個積分是四分之一圓（quarter circle）下方的面積，而這塊面積可以乾淨俐落地分成一個直角三角形和一個扇形（sector），所以毋須作任何代換（substitution）。橢圓（ellipse）是把圓沿兩個方向以不同倍數拉伸而成的，而拉伸會把面積乘以一個常數，於是第二個結果立即得出。至於最後一部分，對稱性（symmetry）幾乎包辦了所有工作：兩個橢圓互為對直線 $y = x$ 的反射（reflection），所以我們只需求交集（intersection）的八分之一，而這一小塊正是第二個結果減去一個三角形。

解答

$(1 - x^2)^{1/2}$ 的積分

所討論的區域由四分之一圓 $y = (1 - x^2)^{1/2}$、兩條坐標軸和直線 $x = c$ 圍成。（這條曲線須理解為邊界：區域是滿足 $0 \le y \le (1 - x^2)^{1/2}$ 和 $0 \le x \le c$ 的點所組成的集合。）它的面積正是我們要求的積分。

設 $P = (c, (1 - c^2)^{1/2})$ 為圓上位於 $x = c$ 上方的點，$Q = (c, 0)$，並設 $\alpha = \sin^{-1} c$，於是 $0 < \alpha \le \frac{\pi}{2}$。連接 O 與 P，便把區域分成兩塊。



- 三角形 OQP 在 Q 處是直角，底為 c，高為 $(1-c^2)^{1/2}$，所以它的面積是 $\frac{1}{2}c(1-c^2)^{1/2}$。
- 餘下的部分是單位圓在 OP 與 y 軸之間的扇形。OP 與 y 軸的夾角是 α，因為 P 與 y 軸的水平距離是 $c = 1\cdot\sin\alpha$。半徑為 1、角為 α 的扇形，面積是 $\frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}\sin^{-1}c$。

把兩塊相加，

$$\int_0^c (1-x^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\left[c(1-c^2)^{\frac{1}{2}} + \sin^{-1}c\right], \qquad 0 < c \le 1,$$

正是所求。（當 $c = 1$ 時，三角形退化成一條線段，我們得到四分之一圓的面積 $\frac{\pi}{4}$。）

橢圓下方的面積

同樣地，區域位於曲線上半部分 $y = b\left(1-x^2/a^2\right)^{1/2}$ 之下，其中 $0 \le x \le c$，所以它的面積是

$$\int_0^c b\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x.$$

代入 $x = au$，則 $\mathrm{d}x = a\,\mathrm{d}u$，積分上下限變成 0 和 c/a（由於 $0 < c \le a$，故 $0 < c/a \le 1$），上式變成

$$ab\int_0^{c/a}(1-u^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u = \frac{ab}{2}\left[\frac{c}{a}\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \sin^{-1}\left(\frac{c}{a}\right)\right],$$

這裏用了第一個結果，並把 c 換成 c/a。這就是所求的面積。

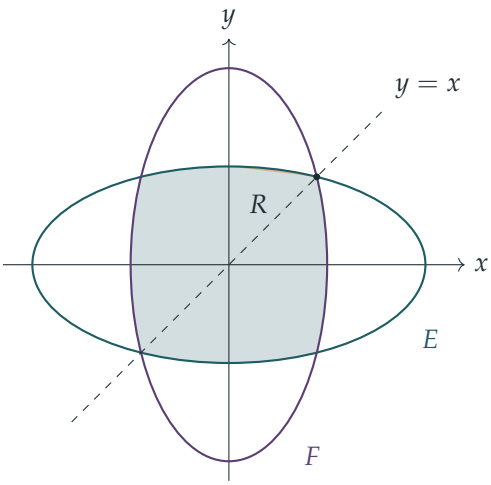
從幾何角度看：橢圓是把單位圓沿水平方向拉伸 a 倍、沿垂直方向拉伸 b 倍而成的，而這個拉伸把每一塊面積都乘以 ab。

兩個橢圓的交集

E 和 F 在 $x \mapsto -x$ 和 $y \mapsto -y$ 之下都保持不變，所以 $E \cap F$ 也是如此，它的面積等於它在象限（quadrant）$x, y \ge 0$ 內那部分面積的四倍。此外，把 x 和 y 對調會把 E 變成 F、

把 F 變成 E，所以 $E\cap F$ 對直線 $y=x$ 對稱。因此，第一象限內的那四分之一由互為鏡像的兩半組成，而

$$\text{面積}(E\cap F)=8\times\text{區域面積}R,\qquad R=\{(x,y)\in E\cap F:\ 0\le x\le y\}.$$



想一想 在 R 之中，兩個橢圓裏究竟是哪一個構成邊界？

對任意一點，

$$\left(\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}\right)-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)=(x^2-y^2)\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right).$$

當 $0\le x\le y$ 時，$x^2-y^2\le 0$；又因為 $0<b\le a$，所以 $\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\ge 0$。因此這個差 ≤ 0：在 $y=x$ 的那一側，E 內的任何一點都自動在 F 內。於是

$$R=\{(x,y)\in E:\ 0\le x\le y\},$$

只有 E 起作用。（這裏用到了 $b\le a$；若 $b>a$，兩個橢圓的角色便會互換。）

E 的邊界在第一象限內與 $y=x$ 相交之處滿足 $x^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)=1$，即交於 $x=y=x_0$，其中

$$x_0=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

當 $0\le x\le x_0$ 時，E 的上半部分位於 $y=x$ 之上或恰在其上（它從高度 $b>0$ 出發，只在 x_0 處與該直線相交），而當 $x>x_0$ 時則位於該直線之下。所以 R 是 $0\le x\le x_0$ 時介乎 $y=x$ 與曲線 $y=b(1-x^2/a^2)^{1/2}$ 之間的區域：

$$\text{面積}(R)=\underbrace{\int_0^{x_0} b\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac12}\mathrm{d}x}_{\text{上一個結果，取}c=x_0}-\underbrace{\tfrac12 x_0^2}_{\text{三角形，位於此線之下：}y=x}.$$

取 $c = x_0$（並且符合所需的條件 $0 < x_0 < a$），

$$\frac{c}{a} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \frac{c}{a}\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{ab}{a^2+b^2}.$$

所以

$$\begin{aligned} \text{面積}(E\cap F) &= 8\,\text{面積}(R) \\ &= 4ab\left[\frac{ab}{a^2+b^2} + \sin^{-1}\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\right] - \frac{4a^2b^2}{a^2+b^2} \\ &= 4ab\sin^{-1}\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), \end{aligned}$$

因為兩個代數項恰好互相抵消。這就是所求的面積。

想一想 為甚麼代數項會互相抵消？

$\frac{ab}{2}\cdot\frac{c}{a}(1-c^2/a^2)^{1/2} = \frac{1}{2}x_0y_0$ 這一項，是圓的圖中那個三角形經拉伸後得到的三角形 O、$(x_0,0)$、(x_0,y_0)。這裏 $y_0 = x_0$，所以它恰好就是我們減去的、位於 $y = x$ 之下的那個三角形。剩下的是一個經拉伸的扇形，這就是答案只含一個反正弦（inverse sine）的原因。

驗算

- 若 $a = b$，兩個橢圓是同一個圓，公式給出 $4a^2\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} = 4a^2\cdot\frac{\pi}{4} = \pi a^2$，與應有的結果相符。
- 當 a 固定而 $b \to 0$ 時，面積的表現近似於 $4ab\cdot\frac{b}{a} = 4b^2$：交集幾乎就是邊長為 $2b$ 的正方形，即 E 那條窄長的水平帶與 F 那條窄長的垂直帶交叉之處。
- 當 $a = 2$、$b = 1$ 時，公式給出 $8\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} \approx 3.70918$。對兩條邊界中較低的一條使用辛普森法則（Simpson's rule），得 3.70918；以 2×10^5 個點作蒙地卡羅（Monte Carlo）估算，得 3.707。頭兩個結果亦已就多組隨機的 a、b、c 以數值求積（quadrature）核對過。

常見錯誤

- 弄錯扇形的角：扇形位於 OP 與 y 軸之間，角是 $\sin^{-1}c$，而不是 $\cos^{-1}c$。
- 沒有檢查是哪一個橢圓圍住該區域。在 $0 \le x \le y$ 這一半之中，邊界是 E，全因 $b \le a$；若選了另一個橢圓，答案中反正弦裏面的 b 便會變成 a。

STEP 之外

線性映射（linear map）$(x, y) \mapsto (ax, by)$ 把每一塊面積都乘以 ab；一般而言，線性映射會把面積乘以其行列式（determinant）的絕對值。這正是重積分（multiple integrals）變數代換公式（change-of-variables formula）中雅可比（Jacobian）因子的二維情形，你會在大學一年級的微積分課程中遇到。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門）把行列式解釋為面積（以及體積）的縮放因子。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。