詳細解答

STEP II 1994，第 3 題

純數學 • 函數方程

> **STEP II 1994，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/94-s2-q3

關鍵思路

關於 f，我們只知道一條對*所有* x 和 y 都成立的恆等式（identity），以及一個函數值 $\mathrm{f}(0) = 1$，除此之外一無所知。因此唯一的工具就是代入（substitution）：選取適當的 x 和 y，使大部分自變數變成 0 或 a，因為函數在這些點的值我們已經知道（或即將知道）。這條恆等式應該令你聯想到 $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$，其中 $\mathrm{f}(a-x)$ 扮演 $\pm \sin x$ 的角色；這個類比既告訴你可以預期甚麼結果，也告訴你例子會是甚麼。

解答

以下一律把題目給出的恆等式寫成

$$\mathrm{f}(x-y) = \mathrm{f}(x)\,\mathrm{f}(y) - \mathrm{f}(a-x)\,\mathrm{f}(a+y) \qquad \text{對所有} x, y. \qquad (*)$$

下面每一步都只是代入 $(*)$，所以我們沒有假設連續性（continuity）、可微性（differentiability）或任何其他性質。

證明 $\mathrm{f}(a) = 0$

在 $(*)$ 中取 $x = y = 0$：

$$\mathrm{f}(0) = \mathrm{f}(0)^2 - \mathrm{f}(a)\,\mathrm{f}(a), \qquad \text{所以} \qquad 1 = 1 - \mathrm{f}(a)^2.$$

因此 $\mathrm{f}(a)^2 = 0$，而 $\mathrm{f}(a)$ 是實數，故 $\mathrm{f}(a) = 0$。

第 (i) 部分

在 $(*)$ 中取 $x = 0$ 和 $y = t$：

$$f(-t) = f(0)\,f(t) - f(a)\,f(a+t) = 1 \cdot f(t) - 0 = f(t),$$

這裏用到 $f(0) = 1$ 和 $f(a) = 0$。所以 f 是偶函數（even function）。

第 (ii) 部分

在 $(*)$ 中取 $x = y = a$：

$$f(0) = f(a)^2 - f(0)\,f(2a), \qquad \text{所以} \qquad 1 = 0 - f(2a),$$

由此得 $f(2a) = -1$。

第 (iii) 部分

> **想一想** 哪一個代入可以令右邊第一個乘積消失，同時讓 t 保持自由？

取 $x = a$ 可以消去 $f(x)f(y)$ 這一項（因為 $f(a) = 0$），並把 $f(a - x)$ 變成 $f(0) = 1$，而 y 仍然可以任意選取。當 $x = a$ 時，$(*)$ 變成

$$f(a - y) = 0 \cdot f(y) - f(0)\,f(a + y) = -f(a + y) \qquad \text{對所有} y.$$

所以 f「關於 a 是奇的」。現在取 $y = a - t$：這時 $a - y = t$ 而 $a + y = 2a - t$，所以

$$f(t) = -f(2a - t),$$

即對所有 t 都有 $f(2a - t) = -f(t)$，這正是所要證明的結果。（取 $t = 0$ 便重新得到第 (ii) 部分的結果，這是一個有用的一致性檢查。）

第 (iv) 部分

把 (iii) 用兩次，中間用一次 (i)。首先，在 (iii) 中把 t 換成 $-t$，得

$$f(2a + t) = -f(-t) = -f(t), \tag{1}$$

這裏用到 (i)。所以把自變數平移 $2a$ 會令函數值變號。再平移 $2a$ 一次，即在 (1) 中把 t 換成 $2a + t$，

$$f(4a + t) = -f(2a + t) = -(-f(t)) = f(t).$$

所以 f 是週期函數（periodic function），週期為 $4a$（當 $a \neq 0$ 時），正如餘弦函數的週期是 $4 \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi$ 一樣。

例子

當 $a = \pi/2$ 時。取 $\mathrm{f}(x) = \cos x$。這時 $\mathrm{f}(0) = 1$，而且由於 $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$ 和 $\cos(\frac{\pi}{2} + y) = -\sin y$，

$$\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(y) - \mathrm{f}(\tfrac{\pi}{2} - x)\mathrm{f}(\tfrac{\pi}{2} + y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y = \cos(x - y) = \mathrm{f}(x - y).$$

當 $a = -2$ 時。試用 $\mathrm{f}(x) = \cos kx$。由上面的結果可知，我們需要 $\mathrm{f}(a) = 0$，即 $\cos(2k) = 0$，並且週期為 $4|a| = 8$；所以取 $k = \frac{\pi}{4}$，即 $\mathrm{f}(x) = \cos\frac{\pi x}{4}$。驗證如下：$\mathrm{f}(0) = 1$，並且設 $u = \frac{\pi x}{4}$、$v = \frac{\pi y}{4}$，則

$$\mathrm{f}(-2 - x) = \cos(-\tfrac{\pi}{2} - u) = \cos(\tfrac{\pi}{2} + u) = -\sin u, \qquad \mathrm{f}(-2 + y) = \cos(v - \tfrac{\pi}{2}) = \sin v,$$

所以

$$\begin{aligned}\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(y) - \mathrm{f}(-2 - x)\mathrm{f}(-2 + y) &= \cos u \cos v + \sin u \sin v \\ &= \cos(u - v) = \cos\tfrac{\pi(x-y)}{4} = \mathrm{f}(x - y).\end{aligned}$$

這兩個函數顯然都不是常數函數。（更一般地說，只要 $\cos ka = 0$，$\cos kx$ 對該 a 值便適用，所以當 $a = -2$ 時 $\cos\frac{3\pi x}{4}$ 同樣可以。）

驗算

在第 (iii) 部分取 $t = 0$，得 $\mathrm{f}(2a) = -\mathrm{f}(0) = -1$，與 (ii) 吻合；在 (iii) 取 $t = a$，得 $\mathrm{f}(a) = -\mathrm{f}(a)$，與 $\mathrm{f}(a) = 0$ 吻合。再以數值檢驗：對 $\mathrm{f}(x) = \cos\frac{\pi x}{4}$ 和 $a = -2$，取 $x = 1$、$y = 3$，左邊是 $\mathrm{f}(-2) = 0$，右邊是 $\mathrm{f}(1)\mathrm{f}(3) - \mathrm{f}(-3)\mathrm{f}(1) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{3\pi}{4} - \cos\frac{3\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} = 0$。用電腦對兩個例子各以 20 000 組隨機數對 (x, y) 測試，結果恆等式在 10^{-13} 的誤差範圍內成立。

常見錯誤

- 弄錯平移半個週期時的正負號：由 (iii) 和 (i) 得 $\mathrm{f}(t + 2a) = -\mathrm{f}(t)$，所以週期是 $4a$，而不是 $2a$。
- 在證明 (i)–(iv) 時假設 f 可微（或假設它就是餘弦函數）。題目不容許這樣做；只可以使用代入。
- 對於 $a = -2$，只寫出 $\cos\frac{\pi x}{4}$ 而沒有驗證它滿足恆等式：符合 $\mathrm{f}(a) = 0$ 和週期的要求只是很好的指引，並不是證明。

STEP 之外

由函數所滿足的恆等式來確定該函數，正是*函數方程*（functional equations）這門學問的課題。在本題中，單憑一條恆等式，便足以推出偶函數性質、「半週期」變號以及週期性。在分析學（analysis）課程中會遇到一些經典結果：柯西（Cauchy）方程 $\mathrm{f}(x+y)=\mathrm{f}(x)+\mathrm{f}(y)$ 在加上連續性的條件後，必然得出 $\mathrm{f}(x)=cx$；若沒有這類條件，便會出現性質極為古怪的解。同樣地，餘弦的減法公式在連續函數之中刻劃了 $\cos kx$。至於連續性如何在這類論證中發揮作用，可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*（一本講解嚴謹的分析學入門書）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。