詳細解答

STEP II 1994，第 2 題

純數學 • 勒讓德多項式

STEP II 1994，第 2 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/94-s2-q2

關鍵思路

每次求導，因式 $(x-a)^m$ 都會保留下來，只是次數減一，所以 m 重的重根（repeated root）同時也是首 $m-1$ 階導數（derivative）的根。多項式 $(x^2-1)^n=(x-1)^n(x+1)^n$ 在 $[-1,1]$ 的兩個端點都有 n 重根，因此對 $x^m\mathrm{P}_n(x)$ 作分部積分（integration by parts）時，每一個邊界項都會消失。每作一次分部積分，就有一階導數從 $(x^2-1)^n$ 轉移到 x^m 上，而 x^m 會比 $(x^2-1)^n$ 更早把導數用盡。

解答

重根與導數

由積法則（product rule），

$$\begin{aligned}\mathrm{P}'(x) &= m(x-a)^{m-1}\mathrm{Q}(x)+(x-a)^m\mathrm{Q}'(x)\\ &= (x-a)^{m-1}[m\mathrm{Q}(x)+(x-a)\mathrm{Q}'(x)] = (x-a)^{m-1}\mathrm{R}(x),\end{aligned}$$

其中 $\mathrm{R}(x)=m\mathrm{Q}(x)+(x-a)\mathrm{Q}'(x)$ 是多項式，因為多項式的和與積仍是多項式。這正是所要求的形式。

這個結果說明：若多項式含有因式 $(x-a)^k$（$k\geq 1$），則它的導數含有因式 $(x-a)^{k-1}$。由 $k=m$ 開始反覆應用這個結果，可得

$$\mathrm{P}^{(r)}(x)=(x-a)^{m-r}\mathrm{R}_r(x)\qquad(0\leq r\leq m)$$

其中 R_r 為某些多項式。每一步都是容許的，因為我們只在 $r\leq m-1$ 時才對 $\mathrm{P}^{(r)}$ 求導以得出 $\mathrm{P}^{(r+1)}$，而此時指數 $m-r$ 至少為 1。若 $1\leq r\leq m-1$，則 $m-r\geq 1$，所以

$(x-a)$ 仍是 $\mathrm{P}^{(r)}(x)$ 的因式，因此 $\mathrm{P}^{(r)}(a)=0$。（這對 $r=0$ 同樣成立，但對 $r=m$ 一般不成立。）

P_n 是 n 次多項式

設 $\mathrm{F}(x)=(x^2-1)^n$。由二項式定理（binomial theorem），$\mathrm{F}(x)$ 等於 x^{2n} 加上次數不超過 $2n-2$ 的各項。把 x^k 求導 n 次，結果或是 0（若 $k<n$），或是 x^{k-n} 的倍數，所以 $\mathrm{P}_n=\mathrm{F}^{(n)}$ 是次數不超過 n 的多項式。它的 x^n 項只來自 x^{2n}：

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}x^{2n}=2n(2n-1)\cdots(n+1)\,x^n=\frac{(2n)!}{n!}\,x^n.$$

這個係數不等於零，所以 P_n 的次數恰好是 n。

等於零的積分

由於 $\mathrm{F}(x)=(x-1)^n(x+1)^n$，在第一部分取 $a=1$、$m=n$ 及 $\mathrm{Q}(x)=(x+1)^n$，可知當 $1\le r\le n-1$ 時 $\mathrm{F}^{(r)}(1)=0$。取 $a=-1$ 作同樣的論證，可得 $\mathrm{F}^{(r)}(-1)=0$。另外，直接可見 $\mathrm{F}(\pm1)=0$。所以

$$\mathrm{F}^{(r)}(\pm1)=0\qquad \text{對於}0\le r\le n-1. \tag{$*$}$$

現在取 $j\ge1$ 及 $1\le k\le n$。作分部積分，對 x^j 求導、對 $\mathrm{F}^{(k)}$ 積分，可得

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}x^j\mathrm{F}^{(k)}(x)\,\mathrm{d}x&=\Big[x^j\mathrm{F}^{(k-1)}(x)\Big]_{-1}^{1}-j\int_{-1}^{1}x^{j-1}\mathrm{F}^{(k-1)}(x)\,\mathrm{d}x\\&=-j\int_{-1}^{1}x^{j-1}\mathrm{F}^{(k-1)}(x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

因為 $k-1\le n-1$，所以由 $(*)$ 可知邊界項等於零。

> **想一想** 這個步驟可以用多少次，才會出問題？

每用一次，x 的冪次減一，導數的階數也減一。我們由 x^m 和 $\mathrm{F}^{(n)}$ 開始，所以可以應用 m 次。這個步驟需要 $k\ge1$，而我們用到的最小的 k 是 $n-m+1\ge1$。經過 m 步之後，

$$\int_{-1}^{1}x^m\mathrm{P}_n(x)\,\mathrm{d}x=(-1)^m m!\int_{-1}^{1}\mathrm{F}^{(n-m)}(x)\,\mathrm{d}x.$$

（當 $m=0$ 時，這就是原來的積分。）

若 $0\le m\le n-1$，則 $n-m\ge1$，所以最後的被積函數（integrand）本身是一個導數，於是

$$\int_{-1}^{1}x^m\mathrm{P}_n(x)\,\mathrm{d}x=(-1)^m m!\Big[\mathrm{F}^{(n-m-1)}(x)\Big]_{-1}^{1}=0,$$

這是由 $(*)$ 得出的，因為 $0\le n-m-1\le n-1$。這就是所要求的結果。

$m = n$ 的情況

取 $m = n$ 時，同樣的化簡過程仍然有效（最後一步用到 $k = 1$），並給出

$$\int_{-1}^{1} x^n \mathrm{P}_n(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^n n! \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n\,\mathrm{d}x = n! \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x,$$

因為 $(x^2-1)^n = (-1)^n(1-x^2)^n$。被積函數是偶函數(even function)，而代換 $x = \sin t$、$\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$ 把 $[0,1]$ 變為 $[0, \frac{\pi}{2}]$，且 $1 - x^2 = \cos^2 t$。所以，利用提示中的公式，

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\pi/2} \cos^{2n+1} t\,\mathrm{d}t = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

因此

$$\boxed{\int_{-1}^{1} x^n \mathrm{P}_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2^{2n+1}(n!)^3}{(2n+1)!}.}$$

驗算

當 $n = 1$ 時，$\mathrm{P}_1(x) = 2x$，所以 $\int_{-1}^{1} x \cdot 2x\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}$，而公式給出 $\frac{8\cdot 1}{6} = \frac{4}{3}$。當 $n = 2$ 時，$\mathrm{P}_2(x) = 12x^2 - 4$。於是 $\int_{-1}^{1}(12x^2-4)\,\mathrm{d}x = 8 - 8 = 0$，且 $\int_{-1}^{1} x(12x^2-4)\,\mathrm{d}x = 0$（被積函數是奇函數），與預期相符。另外 $\int_{-1}^{1} x^2(12x^2-4)\,\mathrm{d}x = \frac{24}{5} - \frac{8}{3} = \frac{32}{15}$，與 $\frac{2^5\cdot 8}{120} = \frac{32}{15}$ 吻合。我們已用電腦對 $n \le 10$ 的所有情況作了精確驗證。

常見錯誤

- 忘記邊界項除了需要 $1 \le r \le n-1$ 時 $\mathrm{F}^{(r)}(\pm 1) = 0$ 之外，還需要 $r = 0$ 時也成立。$m = n - 1$ 的最後一步正是用到 $r = 0$。
- 弄錯正負號：$(x^2-1)^n = (-1)^n(1-x^2)^n$ 抵銷了分部積分所產生的 $(-1)^n$，所以答案是正數。這是合理的，因為 $x^n\mathrm{P}_n(x)$ 的首項係數是正數。

STEP 之外

除了相差一個常數倍之外，P_n 就是 n 次勒讓德多項式（Legendre polynomial），而它的這個公式稱為羅德里格斯公式（Rodrigues' formula）。第一個結果說明，就內積（inner product）$\int_{-1}^{1} fg\,\mathrm{d}x$ 而言，P_n 與每一個次數較低的多項式都正交（orthogonal）。勒讓德級數（Legendre series）和高斯求積法（Gaussian quadrature）背後所依靠的正是這個性質。在球坐標（spherical coordinates）下求解拉普拉斯方程（Laplace's equation）時，勒讓德多項式也會出現。Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（微分方程入門教材）透過勒讓德微分方程（Legendre's differential equation）引入這些多項式。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。