詳細解答

STEP II 1994，第 14 題

概率與統計 • 幾何概率

> **STEP II 1994，第 14 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/94-s2-q14

關鍵思路

「在圓盤上均勻分佈（uniform）」的意思是概率與面積成正比。因此，落點與圓心的距離不超過 r 的概率，就是較小圓盤的面積除以鏢靶的面積，由此立刻得到 R 的分佈函數（distribution function）。第 (ii) 部分於是化為三件事：每次投擲的單一概率 p、一個幾何分佈式的「至少成功一次」計算，以及求一個整數變量函數的最小值。最後一項我們不用微積分，而是考察相鄰兩項之差。

解答

第 (i) 部分

把每枝飛鏢的落點看成在半徑為 a 的圓盤上均勻分佈的一點，於是飛鏢落在鏢靶上任何區域的概率，就是該區域的面積除以 πa^2。

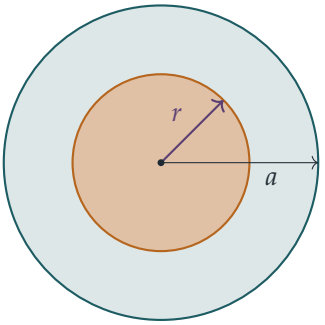
對於 $0 \le r \le a$，事件 $R \le r$ 表示飛鏢落在半徑為 r 的同心圓盤內，所以

$$\mathrm{P}(R \le r) = \frac{\pi r^2}{\pi a^2} = \frac{r^2}{a^2}.$$

求導可得 R 的概率密度函數（probability density function）為

$$f(r) = \frac{2r}{a^2} \qquad (0 \le r \le a),$$

而在其他情況下 $f(r) = 0$。



注意 R 在 $[0,a]$ 上並非均勻分佈：半徑越大，面積越多（薄圓環越長），這就是密度隨 r 線性增長的原因。

現在

$$\mathrm{E}(R) = \int_0^a r \cdot \frac{2r}{a^2}\,\mathrm{d}r = \frac{2}{a^2}\cdot\frac{a^3}{3} = \frac{2a}{3},$$
$$\mathrm{E}(R^2) = \int_0^a r^2 \cdot \frac{2r}{a^2}\,\mathrm{d}r = \frac{2}{a^2}\cdot\frac{a^4}{4} = \frac{a^2}{2},$$

所以

$$\mathrm{Var}(R) = \mathrm{E}(R^2) - (\mathrm{E}(R))^2 = \frac{a^2}{2} - \frac{4a^2}{9} = \frac{a^2}{18},$$

這正是所要證明的方差（variance）。

第 (ii) 部分

（我們把題目中的「with $a/\sqrt{10}$」理解為「within $a/\sqrt{10}$」。）由第 (i) 部分，單次投擲落在距圓心 $a/\sqrt{10}$ 以內的概率為

$$p = \frac{(a/\sqrt{10})^2}{a^2} = \frac{1}{10}.$$

我們假設各次投擲互相獨立（independent）（每次都是鏢靶上一個全新的均勻隨機點）。那麼 m 次投擲中沒有一次落在 $a/\sqrt{10}$ 以內的概率為 $(0.9)^m$，所以

$$\mathrm{P}(\text{他贏回£12}) = 1 - (0.9)^m.$$

他的損失是所付的 $£(12+m)$ 減去贏回的金額，所以他的期望損失（expected loss，以英鎊計）為

$$L(m) = 12 + m - 12(1-(0.9)^m) = m + 12(0.9)^m.$$

每多投一次，肯定要多付 £1，但贏得 £12 的機會也隨之增加；我們需要找出兩者在何處取得平衡。

想一想 一個只在整數上有定義的函數，怎樣求它的最小值？

比較相鄰的值。對於 $m \geq 1$，

$$L(m+1) - L(m) = 1 + 12(0.9)^m(0.9-1) = 1 - 1.2\,(0.9)^m.$$

由於 $(0.9)^m$ 隨 m 增大而減小，這個差隨 m 遞增，所以當差為負時 L 遞減，一旦差變為正便遞增。差為負當且僅當 $(0.9)^m > \frac{1}{1.2} = \frac{5}{6}$。現在

$$(0.9)^1 = 0.9 > \tfrac{5}{6}, \qquad (0.9)^2 = 0.81 < \tfrac{5}{6},$$

所以 $L(2) - L(1) < 0$，而對每個 $m \geq 2$ 都有 $L(m+1) - L(m) > 0$。因此

$$L(1) > L(2) < L(3) < L(4) < \cdots,$$

而事實上 $L(1) = 11.80$，$L(2) = 11.72$，$L(3) = 11.748$。（他決意要玩，所以不容許 $m = 0$；無論如何 $L(0) = 12$ 也較大。）

他應選擇投 $m = 2$ 次，期望損失為 £11.72。由於這個最小值是嚴格的，$m = 2$ 是唯一符合要求的值。

驗算

- 在單位圓盤內模擬 4×10^5 個均勻分佈的點，得出平均值 0.667、平方的平均值 0.500 及方差 $0.0556 \approx \frac{1}{18}$，與 $\frac{2}{3}$、$\frac{1}{2}$ 及 $\frac{1}{18}$ 吻合；約有 10% 的點落在距圓心 $1/\sqrt{10}$ 以內。
- 準確值為 $L(1) = \frac{59}{5}$，$L(2) = \frac{293}{25}$，$L(3) = \frac{2937}{250}$，而在 $1 \leq m \leq 99$ 範圍內逐一搜尋，亦確認 $m = 2$ 為最小值所在。
- 合理性檢查：方差 $a^2/18$ 遠小於 $[0, a]$ 上均勻分佈變量的方差 $a^2/12$，因為 R 集中在靠近邊緣的位置。

常見錯誤

- 把 R 當作在 $[0, a]$ 上均勻分佈，這樣會得出方差 $a^2/12$。
- 忘記固定的 £12 只是成本的一部分：損失是 $12 + m$ 減去期望贏得的金額，而不只是 m。
- 令 $m + 12(0.9)^m$ 的導數等於零會得出 $m \approx 2.3$，這並不是答案；你必須比較它兩側的整數值。

STEP 之外

由平面上一個均勻分佈的點求 R 的分佈，是把聯合密度（joint density）變換到極坐標（polar coordinates）的最簡單例子，其中 $\mathrm{d}A = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ 裏的雅可比（Jacobian）因子 r，正是令 R 的密度與 r 成正比的原因。聯合密度的變量代換，以及在離散選擇上求最優，都是大學一年級概率課程的標準課題。Grimmett 與 Welsh 所著的 *Probability: An Introduction*（概率入門教材）涵蓋了這兩個課題。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。