詳細解答

STEP II 1994，第 12 題

概率與統計 • 條件概率

> **STEP II 1994，第 12 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/94-s2-q12

關鍵思路

第一次擲骰一旦定出「目標點數」(point) s，其後每一次擲骰都是同一個獨立 (independent) 試驗，只有三種結果：擲出 s（勝）、擲出 7（負），或擲出其他點數（繼續）。因此，在給定目標點數的條件下，遊戲結束於第幾次擲骰服從幾何分佈 (geometric distribution)，而整道題目就是按目標點數分情況討論，再用全概率公式（law of total probability）加起來。最後一部分是同樣的計算，只是換了另一個作為條件的事件。

解答

設 S 為兩顆公平骰子的點數和。數算 36 個等可能的結果，可得

$$\mathrm{P}(S=s)=\frac{6-|s-7|}{36},\qquad s=2,3,\ldots,12,$$

所以點數和 $2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12$ 的概率為 $\frac{1}{36}\times(1,2,3,4,5,6,5,4,3,2,1)$。

第一次擲骰即獲勝

若第一次的點數和是 7 或 11，她立即獲勝：

$$\mathrm{P}(\text{獲勝擲次為1})=\frac{6}{36}+\frac{2}{36}=\frac{2}{9}.$$

已知擲骰多於一次，在第 n 次擲骰獲勝

她擲骰多於一次，當且僅當第一次的點數和是目標點數 $4,5,6,8,9,10$ 其中之一，其概率為

$$\mathrm{P}(M)=\frac{3+4+5+5+4+3}{36}=\frac{2}{3},$$

其中 M 是事件「她擲骰多於一次」。

固定一個目標點數 s，並記 $p_s = \mathrm{P}(S = s)$。其後每一次擲骰都與之前的擲骰獨立，而在該次擲骰中，

$$\mathrm{P}(\text{點數和為}s) = p_s, \qquad \mathrm{P}(\text{點數和為}7) = \tfrac{1}{6}, \qquad \mathrm{P}(\text{兩者皆非}) = r_s = 1 - p_s - \tfrac{1}{6}.$$

（由於 $s \neq 7$，這兩個事件互斥（disjoint）。）她在第 $n \geq 2$ 次擲骰獲勝，當且僅當第 $2, \ldots, n-1$ 次擲骰全是「兩者皆非」，而第 n 次擲出 s。所以，由獨立性，

$$\mathrm{P}(\text{獲勝擲次為}n \mid \text{目標點數為}s) = r_s^{n-2}\, p_s.$$

目標點數可以配成概率相等的三對（4 與 10、5 與 9、6 與 8）。記 $p_s = k/36$，其中 $k = 3, 4, 5$；則 $r_s = (30-k)/36$，分別為 $\frac{3}{4}$、$\frac{13}{18}$、$\frac{25}{36}$。由全概率公式，對於 $n \geq 2$，

$$\mathrm{P}(\text{獲勝擲次為}n) = \sum_s p_s \cdot r_s^{n-2} p_s = 2\sum_{k=3}^{5} \left(\frac{k}{36}\right)^2 \left(\frac{30-k}{36}\right)^{n-2}.$$

在第 $n \geq 2$ 次擲骰獲勝必然意味着 M 發生，所以除以 $\mathrm{P}(M) = \frac{2}{3}$ 就相當於把每個係數乘以 $\frac{3}{2}$：

$$2 \cdot \frac{k^2}{1296} \cdot \frac{3}{2} = \frac{k^2}{432} \quad \text{得出} \quad \frac{9}{432} = \frac{1}{48}, \quad \frac{16}{432} = \frac{1}{27}, \quad \frac{25}{432}.$$

因此

$$\mathrm{P}(\text{獲勝擲次為}n \mid M) = \frac{1}{48}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2} + \frac{1}{27}\left(\frac{13}{18}\right)^{n-2} + \frac{25}{432}\left(\frac{25}{36}\right)^{n-2},$$

這正是所要求的結果。

想一想 為甚麼不可以只用一個「平均」目標點數和單一個幾何分佈來計算？

因為繼續下去的概率 r_s 取決於目標點數。三個幾何分佈的混合（mixture）本身並不是幾何分佈，所以答案中有三個不同的冪，而不是只有一個。

已知擲骰多於 m 次

設 M_m 為事件「她擲骰多於 m 次」，其中 $m > 1$。這個事件發生，當且僅當第一次擲骰定出目標點數 s，而第 $2, \ldots, m$ 次擲骰全是「兩者皆非」，所以

$$\mathrm{P}(M_m) = \sum_s p_s\, r_s^{m-1} = \frac{2}{36}\sum_{k=3}^{5} k\left(\frac{30-k}{36}\right)^{m-1}.$$

若 $n \leq m$，在第 n 次擲骰獲勝與 M_m 不能同時發生，所以條件概率（conditional probability）為 0。若 $n > m$，在第 n 次擲骰獲勝必然意味着 M_m 發生，所以

$$\mathrm{P}(\text{獲勝擲次為}n \mid M_m) = \frac{\mathrm{P}(\text{獲勝擲次為}n)}{\mathrm{P}(M_m)} = \frac{9\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2} + 16\left(\frac{13}{18}\right)^{n-2} + 25\left(\frac{25}{36}\right)^{n-2}}{36\left[3\left(\frac{3}{4}\right)^{m-1} + 4\left(\frac{13}{18}\right)^{m-1} + 5\left(\frac{25}{36}\right)^{m-1}\right]},$$

其中因子 $\frac{2}{1296}$ 和 $\frac{2}{36}$ 已經約去。等價地，把分子和分母同乘以 $\frac{1}{432}$，得

$$\frac{\frac{1}{48}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}+\frac{1}{27}\left(\frac{13}{18}\right)^{n-2}+\frac{25}{432}\left(\frac{25}{36}\right)^{n-2}}{\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{m-1}+\frac{1}{3}\left(\frac{13}{18}\right)^{m-1}+\frac{5}{12}\left(\frac{25}{36}\right)^{m-1}}, \qquad n>m.$$

留意分母正是 $\mathrm{P}(M_m \mid M)$，這是理所當然的：分子是先前以 M 為條件的答案，而 $M_m \subseteq M$。

驗算

- 取 $m=1$ 時，分母變成 $\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{5}{12}=1$，還原為上一部分的結果。
- 當 $n=2$ 時，條件概率公式給出 $\frac{1}{48}+\frac{1}{27}+\frac{25}{432}=\frac{50}{432}=\frac{25}{216}\approx 0.1157$；直接計算，$\frac{3}{2}\cdot\frac{2(9+16+25)}{1296}$ 給出相同的值。
- 當 $m=2$、$n=3$ 時，答案是 $\frac{107}{930}\approx 0.1151$。我們用分數把遊戲逐步精確推演，核對了所有公式；另外模擬了 4×10^5 局遊戲，結果在抽樣誤差範圍內吻合。

常見錯誤

- 忘記除以 $\mathrm{P}(M)=\frac{2}{3}$，結果得到係數 $\frac{1}{72}$、$\frac{2}{81}$、$\frac{25}{648}$。
- 以單一個公比寫成 $\mathrm{P}(M_m)=\left(\text{某數}\right)^{m-1}$：作為條件的事件同樣是對各個目標點數的混合。
- 把「兩者皆非」的擲骰次數算成 $n-1$ 而不是 $n-2$：第 1 次擲骰用來定出目標點數，第 n 次擲骰則是獲勝的一擲。

STEP 之外

這個遊戲是一條小型的馬可夫鏈（Markov chain），有「勝」和「負」兩個吸收態（absorbing states），而這裏的吸收時間是幾何分佈的混合。以擲過 m 次仍未結束為條件，會令混合的權重移向維持得最久的目標點數（這裏是 4 和 10，即最難再次擲出的點數）；這是一個簡單的例子，說明無記憶（memoryless）分佈的混合本身並不具有無記憶性。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（概率論入門）以這個程度講解條件概率和馬可夫鏈。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。