詳細解答

STEP II 1994，第 11 題

力學 • 拋體與爆炸

STEP II 1994，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/94-s2-q11

關鍵思路

爆炸發生在一個已知的高度，即垂直飛行的最高點，而那一刻炮彈是靜止的。因此兩塊碎片由同一點出發，速度大小相等、方向相反。若用一個角 θ 來描述方向，每塊碎片的落地時間都可由一條二次方程（quadratic equation）求得，而兩個落地點之間的距離就成為 θ 的單一函數。之所以出現兩種情況，是因為該函數的最大值要麼位於容許範圍的端點，要麼位於範圍內部的轉向點（turning point）。

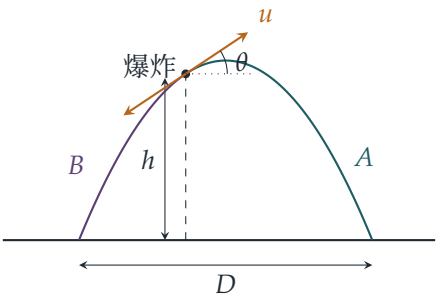
解答

建立模型

我們把炮彈和碎片都視為只受重力作用的質點（particle）。炮彈以初速 v 上升，所以它在以下高度靜止：

$$h = \frac{v^2}{2g}, \qquad \text{即} \qquad 2gh = v^2.$$

把剛爆炸後的兩塊碎片稱為 A 和 B。它們的速度大小相等、方向相反，所以兩者都在通過爆炸點的同一個垂直平面內。在該平面內取 x 軸為水平方向，y 軸垂直向上，爆炸點位於 $(0, h)$。我們可以適當地命名碎片，使 A 不向下運動。於是 A 的速度為 $(u\cos\theta,\ u\sin\theta)$，$B$ 的速度為 $(-u\cos\theta,\ -u\sin\theta)$，其中 $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$。記 $s = \sin\theta$ 及 $c = \cos\theta$，故 $c \ge 0$。



落地時間

爆炸後的時間 t，碎片 A 的高度為 $h + ust - \frac{1}{2}gt^2$。它落地時

$$\tfrac{1}{2}gt^2 - us\,t - h = 0.$$

兩根之積為 $-2h/g < 0$，所以恰好有一個正根：

$$t_A = \frac{us + \sqrt{u^2s^2 + 2gh}}{g} = \frac{us + \sqrt{u^2s^2 + v^2}}{g}.$$

對於 B，垂直速度為 $-us$，所以我們把 s 換成 $-s$：

$$t_B = \frac{-us + \sqrt{u^2s^2 + v^2}}{g}.$$

這個值是正數，因為 $\sqrt{u^2s^2 + v^2} > us$。

落地點之間的距離

在水平方向上，A 沿 x 軸正方向移動了 $uc\,t_A$，B 沿負方向移動了 $uc\,t_B$，所以它們落在發射點的兩側。因此兩個落地點之間的距離為

$$D = uc\,(t_A + t_B) = \frac{2uc\sqrt{u^2s^2 + v^2}}{g}.$$

由於 $D \geq 0$，求 D 的最大值等同於求 D^2 的最大值。設 $x = s^2 \in [0,1]$，則 $c^2 = 1 - x$。於是

$$\frac{g^2D^2}{4u^2} = (1-x)(v^2 + u^2x) = f(x), \qquad \text{記作此式,}$$

並且

$$f(x) = v^2 + (u^2 - v^2)x - u^2x^2.$$

這是 x 的二次函數，首項係數為負，其頂點（vertex）位於

$$x^* = \frac{u^2 - v^2}{2u^2}.$$

想一想 f 的頂點是最大值點，那麼為甚麼答案不總是 $f(x^*)$？

只有 $x \in [0,1]$ 才是容許的，因為 $x = \sin^2\theta$。留意 $x^* < \frac{1}{2}$ 恆成立，所以頂點永遠不會超出上端。頂點是否在容許範圍內，只取決於它的正負。

情況 $u \le v$。此時 $x^* \le 0$。在 $[0,1]$ 上，我們位於一條開口向下的拋物線（parabola）的頂點右方，所以 f 在該區間上遞減，最大值在 $x = 0$ 處取得，而 $f(0) = v^2$。這對應 $\theta = 0$，即水平方向的爆炸。因此

$$D_{\max} = \frac{2u}{g}\sqrt{v^2} = \frac{2uv}{g}.$$

情況 $v \le u$。此時 $0 \le x^* < \frac{1}{2}$，所以頂點在容許範圍內，並給出最大值：

$$\begin{aligned} f(x^*) &= v^2 + \frac{(u^2-v^2)^2}{2u^2} - \frac{(u^2-v^2)^2}{4u^2} = v^2 + \frac{(u^2-v^2)^2}{4u^2} \\ &= \frac{4u^2v^2 + u^4 - 2u^2v^2 + v^4}{4u^2} = \frac{(u^2+v^2)^2}{4u^2}. \end{aligned}$$

所以

$$D_{\max} = \frac{2u}{g}\cdot\frac{u^2+v^2}{2u} = \frac{u^2+v^2}{g}.$$

這在 $\sin^2\theta = \dfrac{u^2-v^2}{2u^2}$ 時發生，所以碎片是與水平方向成一個角度飛出的。

當 $u = v$ 時，兩條公式都給出 $2u^2/g$，所以兩個答案在兩種情況的分界處一致，這是必然的。證明至此完成。

驗算

- 單位：uv/g 和 $(u^2+v^2)/g$ 都是（速率）^{2}/（加速度），即長度。
- 取 $g = 9.8$、$u = 30$ 及 $v = 10$，最佳角度為 $\theta \approx 41.8°$，而由 D 的一般公式和 $(u^2+v^2)/g$ 都得出 $D = 1000/9.8 \approx 102.04\,\text{m}$。水平方向的爆炸只給出 $2\cdot 30\cdot 10/9.8 \approx 61.2\,\text{m}$。
- 以數值方法逐步計算兩條軌跡，並在細密的網格上掃描 θ，對數百組隨機的 (u,v) 都能重現這兩個最大值。
- 當 $v = 0$ 時，炮彈在地面爆炸，答案變成 u^2/g。這正是以速率 u、仰角 $45°$ 發射的拋體（projectile）通常的最大射程，理應如此：B 立即撞入地面，而 $x^* = \frac{1}{2}$ 給出 $\theta = 45°$。

常見錯誤

- 假設最佳的爆炸方向是水平的。這只在 $u \leq v$ 時才成立。
- 對兩塊碎片使用相同的飛行時間。向上拋出的那一塊在空中停留得較久。
- 求最大值時忘記了約束條件 $0 \leq \sin^2\theta \leq 1$，因而漏掉了分情況討論。

STEP 之外

這個簡潔的答案有一個漂亮的解釋。質心（centre of mass）只是筆直下墜，而相對於質心，兩塊碎片以相對速率 $2u$ 沿一條直線互相遠離。但它們在不同的時間着地，所以問題就變成在約束條件下求最優值，而最大值會隨着參數的變化由邊界轉移到內部。這種轉換會在大學一年級最優化（optimisation）課程的拉格朗日乘數（Lagrange multiplier）和 Karush–Kuhn–Tucker 條件中再次出現。關於動量守恆（conservation of momentum）、質心參考系和更深入的拋體問題，可參閱 Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教材）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。