詳細解答

STEP II 1994，第 10 題

力學 • 彈性繩與簡諧運動

STEP II 1994，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/94-s2-q10

關鍵思路

着眼於繩子的伸長量（extension），而不是拖卡的位置。由於貨車的速度恆定，伸長量所滿足的方程與拖卡加速度的方程完全相同，只差一個正負號，而這個方程正是簡諧運動（simple harmonic motion）。因此繩子會在半個振動週期內保持拉緊，然後放開拖卡，而此時拖卡已比貨車走得更快。之後便只是一道普通的勻速追及問題。

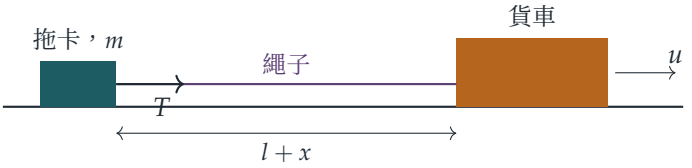
解答

建立模型

把拖卡視為質點（particle），把繩子視為輕繩，拉緊時服從胡克定律（Hooke's law），鬆弛時不施任何力，並忽略摩擦。由繩子首次拉緊的一刻起計時間 t，距離則沿運動方向量度。在 $t = 0$ 時，貨車以速率 u 行駛（並一直保持這個速率），拖卡靜止，而貨車在拖卡前方距離 l 處。

設拖卡位於 $y(t)$，其中 $y(0) = 0$，則貨車位於 $l + ut$。繩子的伸長量為

$$x = (l + ut) - y - l = ut - y.$$



繩子拉緊期間

當 $x > 0$ 時，張力（tension）為 $T = \lambda x/l$，它是拖卡所受的唯一水平力，把拖卡向前拉。所以

$$m\ddot{y} = \frac{\lambda x}{l}.$$

由於 $x = ut - y$ 而 u 為常數，$\ddot{x} = -\ddot{y}$，因此

$$\ddot{x} = -\omega^2 x, \qquad \text{其中} \omega^2 = \frac{\lambda}{ml}.$$

這就是簡諧運動。初始條件（initial conditions）為 $x(0) = 0$（繩子剛剛拉緊）和 $\dot{x}(0) = u - \dot{y}(0) = u$，所以

$$x = \frac{u}{\omega}\sin\omega t, \qquad \dot{x} = u\cos\omega t.$$

拖卡的速度為 $\dot{y} = u - \dot{x} = u(1 - \cos\omega t)$。

> **想一想** 按照簡諧運動的公式，過了一段時間後 x 會變成負數。那時公式還成立嗎？

不成立。方程 $\ddot{x} = -\omega^2 x$ 用到張力 $\lambda x/l$，而這只在 $x > 0$ 時適用；繩子不能推東西。公式在 $0 \le t \le \pi/\omega$ 內成立，此時 $\sin\omega t \ge 0$，而繩子再次鬆弛的時刻為

$$t_1 = \frac{\pi}{\omega} = \pi\left(\frac{lm}{\lambda}\right)^{1/2}.$$

在那一刻伸長量為零，所以拖卡又一次落後貨車距離 l，而它的速度為

$$\dot{y}(t_1) = u(1 - \cos\pi) = 2u.$$

繩子鬆弛之後

當 $t > t_1$ 時，拖卡以 $2u$ 行駛，貨車以 u 行駛，所以兩者之間的距離（在 $t = t_1$ 時為 l）以穩定的速率 $2u - u = u$ 縮短。此後這段距離小於 l，所以繩子保持鬆弛，拖卡仍然不受任何水平力，它的速率確實維持在 $2u$。再過時間 l/u，這段距離便縮短至零。

因此，拖卡與貨車相撞的時刻是繩子首次拉緊後的

$$t_1 + \frac{l}{u} = \pi\left(\frac{lm}{\lambda}\right)^{1/2} + \frac{l}{u}$$

正如題目所求。

驗算

- 單位：λ 是一個力，所以 lm/λ 的單位是 $\mathrm{m}\cdot\mathrm{kg}/\mathrm{N} = \mathrm{s}^2$，兩項都是時間。

- 轉換參考系（frame）：繩子的作用就像一條彈簧，令拖卡與一輛質量實際上無限大的貨車作彈性碰撞（elastic collision）。在貨車的參考系中，拖卡以 u 接近，再以 u 沿相反方向離開，所以它最後相對地面的速率是 $2u$，與上面的結果一致。
- 對拖卡的運動方程作數值積分（numerical integration）（繩子鬆弛時把力關掉），隨機選取 m、l、λ、u 的值，結果與公式吻合；例如選取 m, l, λ, u 使得 $\pi/\omega \approx 2.9944$ 及 $l/u \approx 2.3017$ 時，得出的碰撞時間為 5.2962，而公式的預測值為 5.2961。

常見錯誤

- 把簡諧運動的解用於所有時間，忘記了伸長量回到零時繩子會鬆弛。
- 直接就拖卡的位置 y 寫出運動方程，得到 $m\ddot{y} = \lambda(ut - y)/l$，這是一個受迫方程（forced equation）。它是可以解的，但代換 $x = ut - y$ 能立即把它化成非受迫方程。
- 漏掉最後的 l/u：繩子鬆弛時，拖卡仍然落後貨車整整一個自然長度（natural length）。

STEP 之外

轉到貨車的參考系後，整個過程就變成拖卡與一條固定在不動牆上的彈簧之間的一次彈性「碰撞」：拖卡以速率 u 進來，以速率 u 離開，而不論速率是多少，接觸的時間都恰好是半個週期。這是說明伽利略不變性（Galilean invariance）和能量守恆（energy conservation）如何約束碰撞的最簡單例子；這個想法貫穿大學一年級的力學，並引向散射理論（scattering theory）。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）正是以這種精神處理振動和碰撞。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。