詳細解答

STEP II 1994，第 1 題

純數學 • 整除性與十進制數字

> **STEP II 1994，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/94-s2-q1

關鍵思路

乘積的最後幾位數字，只取決於各因數的最後幾位數字，所以本題的一切運算都是模（modulo）10 的某個冪的算術。末位為 1、3、7 或 9 的數與 10 沒有公因數，因此它在模 10 之下是可逆（invertible）的，事實上在模 10 的任何冪之下也是可逆的。中間部分把 2 和 5 這些因數從 n 中抽出來，再把它們變成零。最後部分則利用模 10^{10} 之下的可逆性，迫使乘積的最後十位數字成為我們想要的任何一組數字。

解答

第 1 部分：末位為 1 的倍數

$n \times m$ 的末位數字，就是（n 的末位數字）×（m 的末位數字）的末位數字，因為其餘各位數字只會貢獻 10 的倍數。由於 n 的末位既不是 5 也不是偶數，所以它的末位是 1、3、7 或 9，而

$$1 \times 1 = 1, \qquad 3 \times 7 = 21, \qquad 7 \times 3 = 21, \qquad 9 \times 9 = 81.$$

因此分別取 $m = 1$、7、3 或 9 即可。這樣 $n \times m$ 的末位便是 1，正如所求。

第 2 部分：任意的 n

寫成

$$n = 2^a 5^b k,$$

其中 $a, b \geq 0$，而 k 既不能被 2 整除，也不能被 5 整除。於是 k 的末位既不是 5 也不是偶數，所以由第 1 部分可知，存在 m' 使得 km' 的末位是 1。現在設

$$m = 2^b 5^a m'.$$

那麼

$$n \times m = 2^{a+b} 5^{a+b} km' = 10^{a+b} (km').$$

乘以 10^{a+b} 只不過是在 km' 之後添上 $a + b$ 個零。所以，若 $a + b = 0$，則 $n \times m$ 的末位是 1；否則它的結尾是 1 後面跟着 $a + b$ 個零。這正是我們所需要的。

例如，$n = 40 = 2^3 \cdot 5$ 對應 $k = 1$，所以 $m = 2 \cdot 5^3 = 250$，而 $n \times m = 10\,000$。

第 3 部分：齊集十個數字

寫成 $n = 10^r q$，其中 $r \geq 0$，而 q 的末位是 1。在末尾添零不會令任何數字消失，所以只需找出 m，使 $q \times m$ 包含每一個數字；這樣 $n \times m = 10^r (qm)$ 也會包含它們。

設 $N = 10^{10}$ 及 $X = 1234567890$，後者包含每一個數字。我們的目標是

$$qm \equiv X \pmod{N},$$

也就是說，qm 的最後十位數字是 1234567890。

> **想一想** 為甚麼 q 必定有某個倍數，除以 10^{10} 時餘數（remainder）是 X？

考慮 N 個數 $q \times 0$, $q \times 1$, …, $q \times (N-1)$，以及它們模 N 的餘數。假設其中兩個餘數相等，譬如 $qs \equiv qt \pmod{N}$，其中 $0 \leq t < s \leq N - 1$。那麼 10^{10} 整除 $q(s-t)$。但 q 的末位是 1，所以它是奇數，也不是 5 的倍數，因而與 $10^{10} = 2^{10}5^{10}$ 沒有公共的質因數。由此可知 $2^{10}5^{10}$ 整除 $s - t$，但這是不可能的，因為 $0 < s - t < N$。所以這 N 個餘數各不相同。可能出現的餘數只有 N 個，即 $0, 1, \ldots, N-1$，所以每一個都會出現。特別地，存在某個滿足 $0 \leq m \leq N - 1$ 的 m，使得 $qm \equiv X \pmod{N}$。

這個 m 不是 0，因為 $X \neq 0$。所以 qm 是一個正的倍數，且 $qm \geq X \geq 10^9$。因此它的最後十位數字正好是 $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0$，而 X 開首的 1 也確實存在。於是 $q \times m$ 包含 $0, 1, \ldots, 9$ 所有數字，$n \times m$ 亦然。

舉例來說，當 $n = 21$ 時，我們可以取 $m = 7\,201\,646\,090$，這時 $21 \times m = 151\,234\,567\,890$。

> **想一想** 關於 n 的假設在哪裏用過？為甚麼需要它？

我們用它只是為了知道 q 沒有因數 2 或 5。沒有這一點，餘數 $qm \bmod 10^{10}$ 就不能取遍所有的值。例如，2 的每個倍數都是偶數，所以結尾不可能是 $\ldots 1$。正是這個假設讓我們可以指定乘積的結尾。（第 2 部分證明了任意的 n 都有一個這種形式的倍數，所以與第 3 部分結合起來，每一個 n 都有一個包含全部十個數字的倍數。）

驗算

- 用手驗算第 1 部分：$13 \times 7 = 91$ 及 $29 \times 9 = 261$。
- 電腦驗算證實，第 1 部分的方法對每一個末位既不是 5 也不是偶數的 $n \leq 20\,000$ 都成立。它亦證實第 2 部分的構造對每一個 $n \leq 20\,000$，以及 20 000 個不超過 10^{15} 的隨機 n 都成立。它還為超過 10 000 個符合所需形式的 n 值計算了第 3 部分的乘數，當中包括末尾有好幾個零的數，而在每一個情況下 $n \times m$ 都包含全部十個數字。例子：$21 \times 7\,201\,646\,090 = 151\,234\,567\,890$ 及 $11 \times 4\,657\,687\,990 = 51\,234\,567\,890$。

常見錯誤

- 在第 3 部分，忘記檢查 1234567890 這組數字是否真的完整出現。開首的 1 需要 $qm \geq 10^9$，而這是成立的，因為 $qm \equiv X$ 且 $qm > 0$。
- 在第 2 部分，乘以 10^{a+b} 而不是 $2^b 5^a$。這樣做雖然添了零，但 2 和 5 這些原本已在 n 之中的因數卻原封不動。

STEP 之外

第 3 部分的鴿巢原理（pigeonhole principle）論證，其實證明了一個一般的事實：若 $\gcd(q, N) = 1$，則 q 在模 N 之下有乘法逆元（multiplicative inverse）。可逆的剩餘（residue）構成一個羣（group），記作 $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$，這是初等數論和 RSA 密碼學的起點。另一個技巧可以證明，最後部分對任何 n 都成立：只要 $10^k \geq n$，就有 n 的某個倍數介乎 $X \cdot 10^k$ 與 $X \cdot 10^k + 10^k$ 之間，而這樣的倍數是以 1234567890 開首的。Davenport 的 *The Higher Arithmetic* 是一本介紹同餘（congruence）與剩餘的優秀入門書。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。