詳細解答

STEP I 1994，第 9 題

力學 • 拋體運動

STEP I 1994，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/94-s1-q9

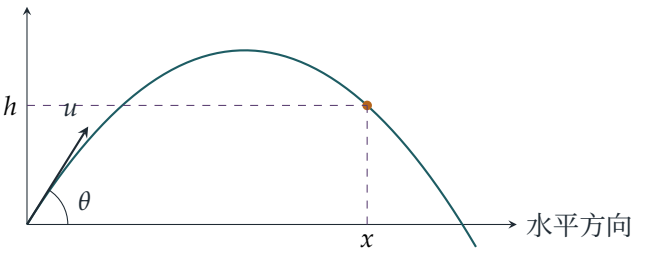
關鍵思路

發射角 θ 是未知的量，所以要把它消去：水平方向和垂直方向的方程分別含有 $u\cos\theta$ 或 $u\sin\theta$，把兩式平方後相加，就可以完全消去 θ。這樣得出的方程是 t^2 的二次方程（quadratic），而二次方程只有在判別式（discriminant）非負時才有實根（real roots）。這個條件正好就是射程的上界。

解答

關於 t 的方程

把炮彈看成只受重力作用的質點（particle），從原點以仰角 θ 發射。經過時間 t 後，它的水平距離為 x，高度為 h，所以它與大炮的距離是 $\sqrt{x^2+h^2}$，與題目所述相符。



利用向下的恆定加速度（constant acceleration）g，以及水平方向不受力，

$$x = ut\cos\theta,$$
$$h = ut\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

把含 θ 的項分離出來：

$$ut\cos\theta = x, \qquad ut\sin\theta = h + \tfrac{1}{2}gt^2.$$

兩式平方後相加，並利用 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$，

$$\begin{aligned} u^2t^2 &= x^2 + (h + \tfrac{1}{2}gt^2)^2 \\ &= x^2 + h^2 + ght^2 + \tfrac{1}{4}g^2t^4, \end{aligned}$$

整理後得

$$\tfrac{1}{4}g^2t^4 - (u^2 - gh)t^2 + h^2 + x^2 = 0,$$

這正是所求。

射程的上界

現在固定 u 和 h，考慮在高度 h 處可以達到哪些水平距離 x。如果炮彈在某時刻 t 位於 (x, h)，那麼 $T = t^2$ 就是以下方程的一個實根：

$$\tfrac{1}{4}g^2T^2 - (u^2 - gh)T + (h^2 + x^2) = 0.$$

> **想一想** 這條方程涉及 x、h、u 和 t，但我們想要的是一個只關於 x 的結論。二次方程若有實根，必須滿足甚麼條件？

有實根就需要判別式非負：

$$\begin{aligned} (u^2 - gh)^2 - 4 \cdot \tfrac{1}{4}g^2(h^2 + x^2) &\geq 0 \\ u^4 - 2u^2gh + g^2h^2 - g^2h^2 - g^2x^2 &\geq 0 \\ g^2x^2 &\leq u^2(u^2 - 2gh). \end{aligned}$$

由於 $u^2 > 2gh$，右邊為正數，兩邊取非負平方根得

$$x \leq \frac{u\sqrt{u^2 - 2gh}}{g}.$$

所以在高度 h 處的水平射程永遠不會超過這個值，這正是我們要證明的。（如果 $u^2 < 2gh$，則不等式對任何 x 都不成立：高度 h 超過了炮彈所能達到的最大高度 $u^2/2g$。）

上界可以達到

等號成立表示判別式為零，所以方程有重根（double root）

$$t^2 = T = \frac{u^2 - gh}{2 \cdot \frac{1}{4}g^2} = \frac{2(u^2 - gh)}{g^2}.$$

這個值是正數（若 $h \geq 0$，因為 $u^2 > 2gh \geq gh$；若 $h < 0$，則顯然成立），所以它確實給出一個時刻 $t > 0$。我們仍須檢查，是否有某個角 θ 能在 $x = u\sqrt{u^2 - 2gh}/g$ 的情況下給出這個時刻。由兩條分量方程，我們需要

$$\sin\theta = \frac{h + \frac{1}{2}gt^2}{ut}, \qquad \cos\theta = \frac{x}{ut}.$$

代入上面 t^2 的值，$h + \frac{1}{2}gt^2 = h + (u^2 - gh)/g = u^2/g$，所以

$$\sin\theta = \frac{u}{gt}, \qquad \cos\theta = \frac{\sqrt{u^2 - 2gh}}{gt}.$$

想一想 我們分別為 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 選定了數值。怎樣知道有同一個角同時取得這兩個值？

兩個值都是正數，而且根據 t^2 的值，

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = \frac{u^2 + u^2 - 2gh}{g^2t^2} = \frac{2(u^2 - gh)}{g^2t^2} = 1$$

。所以在 0 與 $\frac{1}{2}\pi$ 之間恰好有一個角 θ 符合要求，即

$$\tan\theta = \frac{u}{\sqrt{u^2 - 2gh}}.$$

以這個角度發射，炮彈在時刻 t 位於高度 h，水平距離恰好是 $u\sqrt{u^2 - 2gh}/g$，所以當 $u^2 > 2gh$ 時，上界總是可以達到的。

留意當 $h > 0$ 時 $\tan\theta > 1$：要在高於大炮的某個指定高度上射得最遠，發射角要比 45° 更陡。此外，該時刻的垂直速度為 $u\sin\theta - gt = (u^2 - g^2t^2)/(gt) = (2gh - u^2)/(gt) < 0$，所以炮彈是在下降途中到達高度 h 處的最遠點。

驗算

- 當 $h = 0$ 時，上界為 u^2/g，而 $\tan\theta = 1$：這就是大家熟悉的平地最大射程，發射角為 45°。
- 當 $u = 20\,\mathrm{m\,s^{-1}}$、$g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ 而 $h = 10\,\mathrm{m}$ 時，上界約為 29.15 m，此時 $\theta \approx 54.5°$。
- 我們以數值方法確認了該四次方程（quartic）在隨機選取的軌跡上均成立，而且掃描數千個發射角，結果從未超過上界，但可以接近至相差不足 10^{-4}。上面求得的角則恰好達到上界。

常見錯誤

- 嘗試把 x 對 θ 求導來找出最佳的 θ。這樣做是可以的，但過程繁複。判別式已經替你完成了求最優值的工作。
- 忘記最後一步：判別式為零只給出 t 的一個值，但你仍須驗證 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$，以證明確實有一個實數角能給出這個值。

STEP 之外

炮彈以速率 u 發射時所能到達的點構成一個區域，其邊界是所有軌跡的 包絡線（envelope），即「安全拋物線」（parabola of safety）$y = \frac{u^2}{2g} - \frac{gx^2}{2u^2}$。把本題的上界重新整理，可以看出 (x, h) 可以到達，當且僅當它位於這條拋物線上或其下方。曲線族的包絡線同樣源自「重根」這個想法，並且會在變分法（calculus of variations）和光學（焦散線，caustics）中再次出現。想進一步了解拋體（projectiles）及其背後的力學，可參閱 Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。