詳細解答

STEP I 1994，第 8 題

純數學 • 代換積分法

> **STEP I 1994，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/94-s1-q8

關鍵思路

代換（substitution）$\theta = \frac{1}{4}\pi - \phi$ 把區間 $[0, \frac{1}{4}\pi]$ 反射到自身，而複角公式（addition formula）則把 $1 + \tan(\frac{1}{4}\pi - \phi)$ 化為 $2/(1 + \tan\phi)$。於是原來的積分會帶着負號在等式右邊重現，我們只須把它解出來，而不必計算任何困難的積分。後面兩個積分其實是同一個積分的變相：一個經代換 $x = \tan\theta$ 得出，另一個則經半角公式（half-angle formulae）得出。

解答

第一個積分

把這個積分記為 I。設 $\theta = \frac{1}{4}\pi - \phi$，則 $\mathrm{d}\theta = -\mathrm{d}\phi$；當 $\theta = 0$ 時，$\phi = \frac{1}{4}\pi$，而當 $\theta = \frac{1}{4}\pi$ 時，$\phi = 0$。因此

$$I = \int_{\frac{1}{4}\pi}^{0} \ln(1 + \tan(\tfrac{1}{4}\pi - \phi))\,(-\mathrm{d}\phi) = \int_{0}^{\frac{1}{4}\pi} \ln(1 + \tan(\tfrac{1}{4}\pi - \phi))\,\mathrm{d}\phi.$$

利用複角公式及 $\tan\frac{1}{4}\pi = 1$，

$$1 + \tan(\tfrac{1}{4}\pi - \phi) = 1 + \frac{1 - \tan\phi}{1 + \tan\phi} = \frac{2}{1 + \tan\phi}.$$

（在 $[0, \frac{1}{4}\pi]$ 上有 $\tan\phi \geq 0$，所以沒有任何式子等於零，而每個對數都是取正數的對數。）故此

$$I = \int_{0}^{\frac{1}{4}\pi} (\ln 2 - \ln(1 + \tan\phi))\,\mathrm{d}\phi = \tfrac{1}{4}\pi \ln 2 - I,$$

因為最後一個積分正是 I，只是啞變數（dummy variable）換了名稱。

想一想 我們由始至終沒有求出原函數（antiderivative）。為甚麼可以這樣做？

我們根本不需要原函數。I 只是一個數，而代換給出了這個數必須滿足的方程 $I = \frac{1}{4}\pi\ln 2 - I$。解之，得

$$2I = \tfrac{1}{4}\pi\ln 2 \quad\Longrightarrow\quad \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \ln(1+\tan\theta)\,\mathrm{d}\theta = \tfrac{1}{8}\pi\ln 2,$$

正是所求。

含 $1+x^2$ 的積分

因子 $\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ 提示我們設 $x = \tan\theta$，於是 $\mathrm{d}x = \sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta = (1+x^2)\,\mathrm{d}\theta$。積分上下限 $x=0$ 和 $x=1$ 變成 $\theta = 0$ 和 $\theta = \frac{1}{4}\pi$。因此

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \ln(1+\tan\theta)\,\mathrm{d}\theta = \tfrac{1}{8}\pi\ln 2.$$

含 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的積分

把它記為 J。最快捷的方法是利用對稱性（symmetry）：代換 $x = \frac{1}{2}\pi - u$ 把 sin 和 cos 互換，並把 $[0, \frac{1}{2}\pi]$ 映射到自身，所以

$$J = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln\left(\frac{1+\cos u}{1+\sin u}\right)\mathrm{d}u = -J,$$

因此 $J = 0$。（換個說法，$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\ln(1+\sin x)\,\mathrm{d}x$ 與 $\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\ln(1+\cos x)\,\mathrm{d}x$ 相等，所以兩者之差為零。）

想一想 第一個結果在哪裏派上用場？

J 與 I 之間的關係值得一看，這大概也是題目把它放在這裏的原因。設 $t = \frac{1}{2}x$，由半角公式得

$$1+\cos x = 2\cos^2 t, \qquad 1+\sin x = (\cos t + \sin t)^2,$$

所以

$$\frac{1+\sin x}{1+\cos x} = \frac{(\cos t+\sin t)^2}{2\cos^2 t} = \tfrac{1}{2}(1+\tan t)^2.$$

當 x 取遍 $[0, \frac{1}{2}\pi]$ 時，t 取遍 $[0, \frac{1}{4}\pi]$，且 $\mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}t$。因此

$$J = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} (2\ln(1+\tan t) - \ln 2)\,2\,\mathrm{d}t = 4I - \tfrac{1}{2}\pi\ln 2 = \tfrac{1}{2}\pi\ln 2 - \tfrac{1}{2}\pi\ln 2 = 0,$$

與對稱性的論證吻合。所以

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln\left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)\mathrm{d}x = 0.$$

驗算

用辛普森法則(Simpson's rule)計算，tan 的積分和含 $1+x^2$ 的積分都得出 0.2721982613，與 $\frac{1}{8}\pi\ln 2 = 0.2721982613\ldots$ 相符；第三個積分在機器精度之內等於 0。也可以用手粗略驗算：被積函數（integrand）$\ln(1+\tan\theta)$ 由 0 上升至 $\ln 2$，所以 I 應約為 $\frac{1}{4}\pi\ln 2$ 的一半。這恰好就是答案。

常見錯誤

- 忘記了 $\mathrm{d}\theta = -\mathrm{d}\phi$，同時也忘記了上下限要對調。這兩次變號會互相抵消；若只保留其中一次，便會得出 $I = -\frac{1}{4}\pi\ln 2 - I$（以及一個正積分竟得負數答案）。
- 寫成 $\tan(\frac{1}{4}\pi - \phi) = 1 - \tan\phi$，漏掉了複角公式中的分母。
- 在第三個積分上花了很長時間，卻沒有留意到 $x \mapsto \frac{1}{2}\pi - x$ 這個對稱性。

STEP 之外

以反射作代換，再把結果與原式相加，從而得到 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(a+b-x)\,\mathrm{d}x$，這個技巧在某些書中稱為 King 性質（King property）。它同樣能給出經典結果 $\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\ln\sin x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\pi\ln 2$。在大學裏，這類結果屬於含參數定積分（definite integrals with parameters）和圍道積分（contour integration）的理論，當中一整族的積分都可以不求原函數而算出來。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《複分析：可視化方法》）展示了複變方法如何得出這類結果，而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（進階數學難題集）則有更多運用這類對稱技巧的 STEP 式練習。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。