詳細解答

# STEP I 1994，第 6 題

純數學 • 複函數的複合

> **STEP I 1994，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/94-s1-q6

## 關鍵思路

要求一個商的實部（real part）和虛部（imaginary part），可把分子和分母同乘以分母的共軛（conjugate）；由於 $x$ 是實數，這個共軛很容易寫出來。至於重複施行函數的部分，與其把 (i) 中繁複的實部和虛部再代入公式一次，不如對一般的 $z$ 以代數方法把 f 與自身複合（compose），這樣簡潔得多。一旦把 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(z))$ 化成整齊的形式，最後一部分只需一行代入便可完成。

## 解答

由於 $x$ 是實數，$\mathrm{i}x+1$ 的實部為 1，所以它永不為零，因此 $\mathrm{f}(x)$ 對每個實數 $x$ 都有定義。

### 第 (i) 部分

因為 $x$ 是實數，$\mathrm{i}x+1$ 的共軛是 $1-\mathrm{i}x$。把分子和分母同乘以它，

$$\begin{aligned}\mathrm{f}(x) = \frac{(\mathrm{i}x-1)(1-\mathrm{i}x)}{(1+\mathrm{i}x)(1-\mathrm{i}x)} &= \frac{\mathrm{i}x+x^2-1+\mathrm{i}x}{1+x^2} \\ &= \frac{x^2-1}{x^2+1}+\mathrm{i}\,\frac{2x}{x^2+1}.\end{aligned}$$

兩個分數都是實數，所以它們正是所求的實部和虛部。

### 第 (ii) 部分

對任何複數 $w$，$ww^* = (\operatorname{Re} w)^2 + (\operatorname{Im} w)^2$。利用第 (i) 部分，

$$\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(x)^* = \frac{(x^2-1)^2+4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4+2x^2+1}{(x^2+1)^2} = 1.$$

所以 $|\mathrm{f}(x)| = 1$：f 把每個實數映射到單位圓（unit circle）上的一點。

**第 (iii) 部分**

我們不把 (i) 的答案代入 f，而是對一般的 $z$ 進行複合。設 $w = \mathrm{f}(z) = \dfrac{\mathrm{i}z-1}{\mathrm{i}z+1}$，並把 $\mathrm{f}(w) = \dfrac{\mathrm{i}w-1}{\mathrm{i}w+1}$ 的分子和分母同乘以 $\mathrm{i}z+1$：

$$\begin{aligned}\mathrm{f}(\mathrm{f}(z)) &= \frac{\mathrm{i}(\mathrm{i}z-1)-(\mathrm{i}z+1)}{\mathrm{i}(\mathrm{i}z-1)+(\mathrm{i}z+1)} = \frac{-z-\mathrm{i}-\mathrm{i}z-1}{-z-\mathrm{i}+\mathrm{i}z+1} \\ &= \frac{-(1+\mathrm{i})(z+1)}{(1-\mathrm{i})(1-z)} = \frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\cdot\frac{z+1}{z-1} = \mathrm{i}\,\frac{z+1}{z-1},\end{aligned}$$

這是因為 $\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \dfrac{(1+\mathrm{i})^2}{2} = \mathrm{i}$。

**想一想** $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x))$ 是否對每個實數 $x$ 都有定義？

不是。我們需要 $\mathrm{i}w+1 \neq 0$，即 $\mathrm{f}(x) \neq \mathrm{i}$。由第 (i) 部分，$\mathrm{f}(x) = \mathrm{i}$ 需要 $x^2-1=0$ 及 $2x = x^2+1$，而這只在 $x=1$ 時成立。這與上式分母中的因式 $x-1$ 吻合。所以對實數 $x \neq 1$，

$$\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) = \mathrm{i}\,\frac{x+1}{x-1}, \qquad \text{所以} \qquad \operatorname{Re}\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) = 0, \quad \operatorname{Im}\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) = \frac{x+1}{x-1}.$$

第一次施行 f 把實數線映射到單位圓，第二次則把單位圓映射到虛軸。

**第 (iv) 部分**

寫 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) = \mathrm{i}y$，其中 $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ 是實數。於是 $\mathrm{i}(\mathrm{i}y) = -y$，所以

$$\mathrm{f}(\mathrm{i}y) = \frac{-y-1}{-y+1} = \frac{y+1}{y-1}.$$

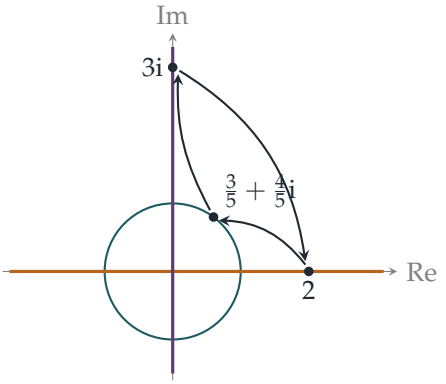
這個式子有定義，因為 $y=1$ 需要 $x+1 = x-1$，而這是不可能的。現在

$$y+1 = \frac{2x}{x-1}, \qquad y-1 = \frac{2}{x-1},$$

所以

$$\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathrm{f}(x))) = x \qquad \text{對每個實數} x \neq 1.$$

施行 f 三次便回到起點：第三次施行把虛軸送回實數線。下圖顯示 $x=2$ 時的循環，即 $2 \mapsto \frac{3}{5}+\frac{4}{5}\mathrm{i} \mapsto 3\mathrm{i} \mapsto 2$。




## 驗算

- $x = 0$：$\mathrm{f}(0) = -1$，它在單位圓上，與 (i) 一致。然後 $\mathrm{f}(-1) = \dfrac{-\mathrm{i}-1}{-\mathrm{i}+1} = -\mathrm{i}$，與 $\mathrm{i}\frac{0+1}{0-1}$ 吻合，而 $\mathrm{f}(-\mathrm{i}) = \frac{1-1}{1+1} = 0$。
- $x = 2$：第 (i) 部分給出 $\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\mathrm{i}$，第 (iii) 部分給出 3i，第 (iv) 部分則回到 2。以 $10^4$ 個隨機實數 $x$（以及隨機複數 $z$）作數值檢驗，結果證實以上每條公式都準確至捨入誤差之內。

## 常見錯誤

- 把 (i) 的實部和虛部直接代入 f。這樣做是可行的，但代數運算繁重，容易出錯。以 $z$ 來進行複合則簡潔得多。
- 忘記在 (iii) 和 (iv) 中必須排除 $x = 1$，因為 $\mathrm{f}(1) = \mathrm{i}$，而 $\mathrm{f}(\mathrm{i})$ 的分母為零。

## STEP 之外

形如 $z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$ 的函數稱為莫比烏斯變換（*Möbius transformation*）。這類映射把圓和直線映射到圓和直線，正如我們在這裏所見：實軸到單位圓，再到虛軸，然後返回實軸。把兩個這樣的變換複合，相當於把 $2\times 2$ 矩陣 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 相乘。事實上，對每個複數 $z$ 都有 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathrm{f}(z))) = z$，所以 f 在莫比烏斯變換所組成的羣（group）中的階（order）為 3。此外，在 (i) 中代入 $x = \tan\frac{\theta}{2}$，可得 $\mathrm{f}(x) = -\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$，這就是大家熟悉的「$t$ 代換」圓參數化（parametrisation）。Needham 的 *Visual Complex Analysis* 中有一章精彩地講述莫比烏斯變換及其幾何。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。