詳細解答

STEP I 1994，第 5 題

純數學 • 拋物線上的軌跡

> **STEP I 1994，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/94-s1-q5

關鍵思路

先把幾何條件化為代數條件。原點處的角是直角，即位置向量（position vector）$\overrightarrow{OP}$ 與 $\overrightarrow{OQ}$ 互相垂直；對於 $y = x^2$ 上的點，這個條件可簡化為 p 與 q 之間一個簡潔的關係式。這樣一來，R 和 T 兩點的坐標都是關於 p 和 q 對稱的，所以我們把一切都用 $p+q$ 和 pq 表示，然後消元。

解答

直角的條件

P 和 Q 都不可能是原點，否則該角便沒有定義，所以 $p \neq 0$ 且 $q \neq 0$。角 POQ 是直角，當且僅當 $\overrightarrow{OP} = (p, p^2)$ 與 $\overrightarrow{OQ} = (q, q^2)$ 的純量積（scalar product）為零：

$$pq + p^2q^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad pq(1+pq) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad pq = -1,$$

其中最後一步除以 $pq \neq 0$。（等價的說法是：OP 與 OQ 的斜率（gradient）分別為 p 和 q，兩者之積為 -1。）

因此我們要找的數對，正是 $q = -1/p$，其中 $p \neq 0$。當 p 取遍所有非零實數時，兩數之和

$$s = p + q = p - \frac{1}{p}$$

可取得每一個實數值：任意給定 s，二次方程 $p^2 - sp - 1 = 0$ 的判別式（discriminant）為 $s^2 + 4 > 0$，所以它有實根，而且兩根之積為 -1，故兩根皆不為零。我們稍後需要這個結論，才能說明下面的軌跡（locus）是完整的曲線，而不只是曲線的一部分。

第 (i) 部分

PQ 的中點（midpoint）是

$$R = \left(\frac{p+q}{2},\ \frac{p^2+q^2}{2} \right).$$

設 $R = (x, y)$，則 $p + q = 2x$。利用 $pq = -1$，

$$y = \frac{(p+q)^2 - 2pq}{2} = \frac{4x^2+2}{2} = 2x^2 + 1.$$

由於 $p + q$ 可取得每一個實數值，x 亦然，所以 R 的軌跡是整條拋物線（parabola）

$$y = 2x^2 + 1,$$

其頂點（vertex）為 $(0, 1)$，對稱軸為 y 軸。它比 $y = x^2$ 窄，而且完全位於後者的上方，因為 $2x^2 + 1 - x^2 = x^2 + 1 > 0$；這與 R 是凸（convex）曲線上一條弦（chord）的中點這一事實吻合。

第 (ii) 部分

對 $y = x^2$ 求導，可知在 P 的切線（tangent）斜率為 $2p$，所以切線方程為

$$y - p^2 = 2p(x - p), \qquad \text{即} \qquad y = 2px - p^2,$$

同理，在 Q 的切線為 $y = 2qx - q^2$。這兩條切線並不平行，因為 $p \neq q$（兩者之積為 -1，所以不可能相等）。把兩條方程相減，

$$2(p - q)x = p^2 - q^2 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{p+q}{2},$$

其中除以了 $p - q \neq 0$。於是

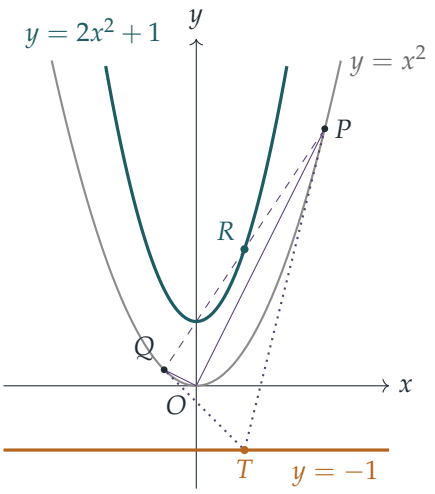
$$y = 2p \cdot \frac{p+q}{2} - p^2 = pq = -1.$$

? **想一想** T 的 y 坐標是常數。那麼軌跡是單獨一點、一條線段，還是整條直線？

T 的 x 坐標是 $\frac{1}{2}(p + q)$，而我們已證明它可取得每一個實數值。所以 T 可以位於該直線上的任何位置，T 的軌跡就是整條直線

$$y = -1.$$

還可留意，T 總是在 R 的正下方：兩者的 x 坐標都是 $\frac{1}{2}(p + q)$。



圖中所示是其中一個位置，$p = 2$，$q = -\frac{1}{2}$：此時 $R = (\frac{3}{4}, \frac{17}{8})$ 在藍綠色的拋物線上，而 $T = (\frac{3}{4}, -1)$ 在琥珀色的直線上。

驗算

取 $p = 1$，$q = -1$：則 $P = (1, 1)$，$Q = (-1, 1)$，而 OP、OQ 就是直線 $y = \pm x$，顯然互相垂直。中點是 $(0, 1)$，即 $y = 2x^2 + 1$ 的頂點；兩條切線 $y = 2x - 1$ 與 $y = -2x - 1$ 相交於 $(0, -1)$，在 $y = -1$ 上。再取圖中的 $p = 2$，$q = -\frac{1}{2}$，則 $2 \cdot (\frac{3}{4})^2 + 1 = \frac{17}{8}$，與預期相符。另外以 10^5 個隨機的 p 值作數值檢驗，結果確認 R 滿足 $y = 2x^2 + 1$，誤差約在 10^{-10} 以內，而 T 的坐標總是滿足 $y = -1$。

常見錯誤

- 寫到 $pq(1 + pq) = 0$ 便停下，沒有解釋為何可排除 $pq = 0$：這種情況會令 P 或 Q 落在原點。
- 只寫出軌跡的方程，卻沒有檢查是否每一個 x 值都能取得，以確定所畫的草圖應是整條曲線而不是其中一部分。
- 以為 T 位於準線（directrix）上。$y = x^2$ 的準線是 $y = -\frac{1}{4}$；當 PQ 通過焦點（focus）時，兩條切線才會在準線上相交，這與 $\angle POQ = 90°$ 是不同的條件。

STEP 之外

這裏的弦 PQ 總是通過定點 $(0,1)$：它的方程是 $y=(p+q)x-pq=(p+q)x+1$。通過一個定點的直線族，以及與之對應、由切線相交而成的「極點」（pole）（這裏它們位於直線 $y=-1$ 上，即 $(0,1)$ 的極線（polar)），正是射影幾何（projective geometry）的起點；射影幾何會有系統地研究圓錐曲線（conics）及其極點與極線的關係。想做更多同類題目，可參考 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。