詳細解答

STEP I 1994，第 4 題

純數學 • 反正切積分

> **STEP I 1994，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/94-s1-q4

關鍵思路

第 (i) 部分是一條半角恆等式（half-angle identity），第 (ii) 部分則是標準的「先配方（complete the square），再用 $\tan^{-1}$」積分。最後的積分就是第 (ii) 部分取 $k = \cos\alpha$ 的情況，這時 $\sqrt{1-k^2} = \sin\alpha$，剛好與分子的因子 $\sin\alpha$ 約去。唯一真正要小心的地方在最後：對某個角的正切取 $\tan^{-1}$，只有當該角落在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 之內時，才會得回原來的角。

解答

第 (i) 部分

利用二倍角公式(double-angle formulae)$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{1}{2}\alpha$ 及 $\sin\alpha = 2\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha$，

$$\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2\sin^2\frac{1}{2}\alpha}{2\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha} = \frac{\sin\frac{1}{2}\alpha}{\cos\frac{1}{2}\alpha} = \tan\tfrac{1}{2}\alpha,$$

只要 $\sin\alpha \neq 0$（使等式兩邊均有定義），上式便成立。這正是所要證明的結果。

第 (ii) 部分

將分母配方：

$$1 - 2kx + x^2 = (x-k)^2 + (1-k^2).$$

由於 $|k| < 1$，常數 $1-k^2$ 為正數，故可寫成 $1-k^2 = a^2$，其中 $a = \sqrt{1-k^2} > 0$。（條件 $|k| < 1$ 正是用在這裏：否則分母可以因式分解，得到的便會是對數而不是反正切。）作

代換（substitution）$x-k=a\tan\theta$，則 $\mathrm{d}x=a\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$，

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-k)^2+a^2}&=\int\frac{a\sec^2\theta}{a^2\tan^2\theta+a^2}\,\mathrm{d}\theta=\int\frac{1}{a}\,\mathrm{d}\theta=\frac{\theta}{a}+C\\&=\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\tan^{-1}\left(\frac{x-k}{\sqrt{1-k^2}}\right)+C,\end{aligned}$$

這就是所求的結果。　（另一做法是對右邊求導：由鏈式法則（chain rule）可得 $\frac{1}{a}\cdot\frac{1/a}{1+(x-k)^2/a^2}=\frac{1}{(x-k)^2+a^2}$。）

最後的積分

取 $k=\cos\alpha$。由於 $0<\alpha<\pi$，我們有 $|k|<1$，所以第 (ii) 部分適用；又因為 $\sin\alpha>0$，可得

$$\sqrt{1-k^2}=\sqrt{\sin^2\alpha}=\sin\alpha$$

（而不是 $-\sin\alpha$，因為在這個區間上 $\sin\alpha>0$）。因此分子的因子 $\sin\alpha$ 與第 (ii) 部分的因子 $1/\sqrt{1-k^2}$ 互相約去：

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}\,\mathrm{d}x&=\left[\tan^{-1}\left(\frac{x-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\right]_0^1\\&=\tan^{-1}\left(\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\\&=\tan^{-1}(\tan\tfrac{1}{2}\alpha)+\tan^{-1}(\cot\alpha),\end{aligned}$$

其中第一項用了第 (i) 部分，第二項則用了 $\tan^{-1}$ 是奇函數（odd function）這一事實。

> **想一想** $\tan^{-1}(\tan\theta)$ 是否總是等於 θ？

不是：$\tan^{-1}$ 的取值範圍是 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，所以只有當 θ 在這個區間內時，才有 $\tan^{-1}(\tan\theta)=\theta$。我們逐項檢查。

- 由於 $0<\alpha<\pi$，我們有 $0<\frac{1}{2}\alpha<\frac{\pi}{2}$，所以 $\tan^{-1}\left(\tan\frac{1}{2}\alpha\right)=\frac{1}{2}\alpha$。
- 寫成 $\cot\alpha=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$。由於 $0<\alpha<\pi$，角 $\frac{\pi}{2}-\alpha$ 落在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 之內，所以 $\tan^{-1}(\cot\alpha)=\frac{\pi}{2}-\alpha$。

兩項相加，

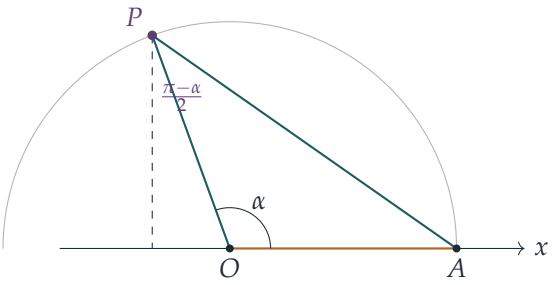
$$\int_0^1\frac{\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{2}-\alpha=\frac{\pi-\alpha}{2},$$

這就是所求的結果。

另一做法：一幅圖

這個答案背後有一個很漂亮的幾何原因。設 $P=(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 為單位圓上的一點，O 為原點，$A=(1,0)$。當點 $X=(x,0)$ 沿 x 軸移動時，PX 與過 P 向下的鉛垂線之間的夾

角 θ 滿足 $\tan\theta = (x - \cos\alpha)/\sin\alpha$，而被積函數（integrand）正好就是 $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}x$。所以這個積分就是 X 由 O 移到 A 時所掃過的角，即角 OPA。三角形 OPA 是等腰三角形，$OP = OA = 1$，在 O 處的頂角為 α，所以兩個底角各為 $\frac{1}{2}(\pi - \alpha)$。



驗算

- 當 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 時，積分為 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$，而公式給出 $\frac{1}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$。
- 數值上，取 $\alpha = 1$，以辛普森法則（Simpson's rule）計算得 $1.0707963\ldots$，與 $\frac{1}{2}(\pi - 1) = 1.0707963\ldots$ 吻合。
- 當 $\alpha \to \pi^-$ 時，對 $[0,1]$ 內的每個 x，被積函數都趨向 0，而 $\frac{1}{2}(\pi - \alpha)$ 亦然。

常見錯誤

- 寫下 $\tan^{-1}(\cot\alpha) = \frac{\pi}{2} - \alpha$，卻沒有檢查 $\frac{\pi}{2} - \alpha$ 是否落在 $\tan^{-1}$ 的值域之內；當 α 在 $(0,\pi)$ 以外時，同樣的做法便會出錯。
- 把 $\sqrt{1-\cos^2\alpha} = |\sin\alpha|$ 當作 $\sin\alpha$，卻沒有說明原因；這裏的原因是 $0 < \alpha < \pi$。

STEP 之外

當 $\alpha \to 0^+$ 時，答案趨向 $\frac{\pi}{2}$，儘管在 $\alpha = 0$ 時被積函數恆等於零：被積函數在 $x = 1$ 附近變成一個又高又窄的尖峯，而其面積並不縮小。這就是半平面的泊松核（Poisson kernel），而隨意交換極限與積分的次序便會得出錯誤的答案。這種交換在甚麼情況下才容許，是大學一年級分析學（analysis）的核心問題；參見 Abbott 的 *Understanding Analysis*。至於「所對的角」這個幾何觀點，Needham 的 *Visual Complex Analysis* 有十分精彩的闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。