詳細解答

STEP I 1994，第 2 題

純數學 • 對數微分法

> **STEP I 1994，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/94-s1-q2

關鍵思路

當變數在底數而指數固定時，可以用冪法則（power rule）；當底數固定而變數在指數時，可以用指數函數的求導法則（exponential rule）。一旦 x 同時出現在這兩個位置，兩條法則都不能直接套用。解決辦法是把所有式子寫成 e 的冪，或者等價地，先取對數（logarithm），再作隱函數微分（implicit differentiation）：對數能把難纏的冪化為乘積，而乘積正是我們懂得處理的。

全題假設 $x > 0$（否則 x^x 和 $\ln x$ 都沒有意義），而在 (ii) 中底數 a 必須為正數。

解答

我們會反覆使用的唯一工具：對 $u > 0$，

$$u^v = \mathrm{e}^{v \ln u},$$

所以若 $y = u^v$，則 $\ln y = v \ln u$，再用鏈式法則（chain rule）求導，得 $\dfrac{1}{y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(v \ln u)$。

第 (i) 部分

這裏指數是常數，所以用的就是普通的冪法則：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, x^a = a\, x^{a-1}.$$

如果你想知道為何它對任意實數 a（而不只是整數）都成立，可以寫 $x^a = \mathrm{e}^{a \ln x}$；由鏈式法則得 $\mathrm{e}^{a \ln x} \cdot \frac{a}{x} = a\, x^a / x = a\, x^{a-1}$。

第 (ii) 部分

現在底數是常數。寫成 $a^x = \mathrm{e}^{x\ln a}$，其中 $\ln a$ 只是一個常數，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,a^x = \ln a\,\mathrm{e}^{x\ln a} = a^x \ln a.$$

請留意這與 (i) 有多大分別：答案並不是 $x\,a^{x-1}$。

第 (iii) 部分

設 $y = x^x$。取對數，得 $\ln y = x\ln x$。兩邊求導，右邊用積法則（product rule），

$$\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \ln x + x\cdot\frac{1}{x} = 1 + \ln x,$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,x^x = x^x\,(1+\ln x).$$

想一想 為甚麼不能直接用冪法則，得出 $x\cdot x^{x-1} = x^x$？

冪法則假設指數是常數，而指數函數的求導法則假設底數是常數。這裏兩者都在變。事實上，答案恰好是兩個「錯誤」答案之和：把指數當作固定，得 $x\cdot x^{x-1} = x^x$；把底數當作固定，得 $x^x\ln x$；而真正的導數是 $x^x + x^x\ln x$。這其實是多元鏈式法則（multivariable chain rule）的變相：當 $y = u^v$ 時，每個變數各自貢獻它的變化率。

第 (iv) 部分

設 $y = x^{(x^x)}$，這是一座冪塔，其指數本身就是 x^x。取對數，

$$\ln y = x^x \ln x.$$

用積法則對右邊求導，其中 x^x 的導數取自 (iii)：

$$\begin{aligned}\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= x^x(1+\ln x)\cdot\ln x + x^x\cdot\frac{1}{x}\\ &= x^x\left(\frac{1}{x} + \ln x + (\ln x)^2\right).\end{aligned}$$

乘以 $y = x^{(x^x)}$，並把 x 的冪合併，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,x^{(x^x)} = x^{(x^x)}\,x^x\left(\frac{1}{x} + \ln x + (\ln x)^2\right) = x^{x^x+x}\left(\frac{1}{x} + \ln x + (\ln x)^2\right).$$

等價地，把 $\frac{1}{x}$ 收進括號內，得 $x^{x^x+x-1}(1 + x\ln x + x(\ln x)^2)$。

第 (v) 部分

想一想 $(x^x)^x$ 不就是 (iv) 中的式子嗎？

不是。根據指數定律（law of indices）$(u^m)^n = u^{mn}$，我們有 $(x^x)^x = x^{x\cdot x} = x^{x^2}$，而 (iv) 中的指數是 x^x，不是 x^2。兩者碰巧在 $x = 1$ 和 $x = 2$ 時相等（在 $x = 2$ 時都等於 16），但在 $x = 3$ 時，一個是 3^{27}，另一個只是 3^9。

因此設 $y = x^{x^2}$。於是 $\ln y = x^2 \ln x$，由積法則得

$$\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x\ln x + x^2\cdot\frac{1}{x} = x\,(1+2\ln x).$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,(x^x)^x = x^{x^2}\cdot x\,(1+2\ln x) = x^{x^2+1}\,(1+2\ln x).$$

（你也可以直接對 $(x^x)^x$ 求導：$\ln y = x\ln(x^x) = x^2\ln x$，結果一樣。）

驗算

- 在 $x = 1$ 時，(iii)、(iv) 和 (v) 的導數全都等於 1：例如在 (iv) 中，$1^{1+1}(1+0+0) = 1$。用中心差分（central difference）$\big(f(1.000001) - f(0.999999)\big)/0.000002$ 計算，結果吻合。
- x^x 在 $x = \mathrm{e}^{-1}$ 處有極小值，該處 $1+\ln x = 0$；而 $(x^x)^x = x^{x^2}$ 在 $x = \mathrm{e}^{-1/2}$ 處有極小值，該處 $1+2\ln x = 0$。兩者都可以在圖像計算機上看到。
- 我們在 $0.2 \le x \le 2.5$（以及 $0.2 \le a \le 4$）的範圍內隨機取了 2000 個點，把每條公式與數值導數比較；相對誤差始終小於 10^{-9}。

常見錯誤

- 寫成 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^x = x\cdot x^{x-1}$ 或 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a^x = x\,a^{x-1}$：冪法則要求指數是常數。
- 把 (iv) 和 (v) 當作同一個函數。冪運算不滿足結合律(associative)：一般而言 $x^{(x^x)} \neq (x^x)^x$。
- 對 $\ln y$ 求導之後，忘記乘回 y。

STEP 之外

當 a 是無理數時，例如 $x^{\sqrt{2}}$，x^a 究竟是甚麼意思？大學裏的答案是：先用冪級數（power series）定義 exp，再把 ln 定義為它的反函數，然後對 $u > 0$ 定義 $u^v = \mathrm{e}^{v \ln u}$；這樣一來，所有指數定律和上面的導數公式都成為定理。Abbott 的 *Understanding Analysis*，或 Bartle 與 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*，都對此有嚴謹的處理。(iii) 中「兩個錯誤答案之和」，正是對偏導數（partial derivative）和多元鏈式法則的初步一瞥。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。