詳細解答

STEP I 1994，第 14 題

概率與統計 • 指數分佈的順序統計量

STEP I 1994，第 14 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/94-s1-q14

關鍵思路

每個 T_i 都服從指數分佈（exponential distribution），所以第 (i) 部分只是兩個標準的分部積分（integration by parts）。至於最後一篇和第一篇文章，竅門在於把關於最大值或最小值的陳述，轉化為關於每一個 T_i 的陳述：最後一篇文章在時刻 u 或之前交到，當且僅當所有文章都在那時或之前交到；第一篇文章在時刻 t 仍未交到，當且僅當所有文章在那時都仍未交到。獨立性（independence）隨即把「所有」變成乘積，再對分佈函數（distribution function）求導，便得到密度函數（density）。

解答

第 (i) 部分

以 X 表示任意一個 T_i，其密度函數為 $f(t) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}$（$t \geq 0$）。用分部積分，取 $u = t$ 及 $\mathrm{d}v = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$（故 $v = -\mathrm{e}^{-\lambda t}$），

$$\mathrm{E}(X) = \int_0^\infty t\,\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \Big[-t\mathrm{e}^{-\lambda t}\Big]_0^\infty + \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = 0 + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda},$$

因為當 $t \to \infty$ 時 $t\mathrm{e}^{-\lambda t} \to 0$（指數函數的增長勝過冪函數）。同樣地，

$$\mathrm{E}(X^2) = \int_0^\infty t^2 \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \Big[-t^2\mathrm{e}^{-\lambda t}\Big]_0^\infty + \int_0^\infty 2t\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\lambda}\,\mathrm{E}(X) = \frac{2}{\lambda^2},$$

其中我們認出 $\int_0^\infty t\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$ 就是 $\frac{1}{\lambda}\mathrm{E}(X)$。因此

$$\mathrm{E}(T_i) = \frac{1}{\lambda}, \qquad \mathrm{Var}(T_i) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

第 (ii) 部分

首先我們需要單獨一個 T_i 的分佈函數：對於 $u \geq 0$，

$$\mathrm{P}(T_i \leq u) = \int_0^u \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda u}.$$

現在 $U = \max(T_1, \ldots, T_n)$，而各個 T_i 中最大的一個不超過 u，當且僅當每一個都不超過 u：

$$\{U \leq u\} = \{T_1 \leq u\} \cap \{T_2 \leq u\} \cap \cdots \cap \{T_n \leq u\}.$$

? **想一想** 為甚麼這裏可以把各個概率相乘？

事件 $\{T_i \leq u\}$ 涉及不同的 T_i，而按假設它們互相獨立，所以交集的概率等於各概率的乘積。因此，對於 $u \geq 0$，

$$\mathrm{P}(U \leq u) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}(T_i \leq u) = (1 - \mathrm{e}^{-\lambda u})^n,$$

正是題目所求。U 的密度函數是這個分佈函數的導數；由鏈式法則（chain rule），

$$f_U(u) = n(1 - \mathrm{e}^{-\lambda u})^{n-1} \cdot \lambda \mathrm{e}^{-\lambda u} = n\lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda u}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda u})^{n-1} \qquad (u \geq 0),$$

而當 $u < 0$ 時 $f_U(u) = 0$。

第 (iii) 部分

現在 $T = \min(T_1, \ldots, T_n)$。這裏有用的是補事件（complement）：第一篇文章在時刻 t 之後才交到，當且僅當到那時沒有一篇交到，即每一個 $T_i > t$。利用 $\mathrm{P}(T_i > t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$，並再次運用獨立性，

$$\mathrm{P}(T > t) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}(T_i > t) = (\mathrm{e}^{-\lambda t})^n = \mathrm{e}^{-n\lambda t} \qquad (t \geq 0).$$

所以 $\mathrm{P}(T \leq t) = 1 - \mathrm{e}^{-n\lambda t}$，求導得

$$f_T(t) = n\lambda\, \mathrm{e}^{-n\lambda t} \qquad (t \geq 0),$$

而當 $t < 0$ 時 $f_T(t) = 0$。

第 (iv) 部分

第 (iii) 部分的密度函數，正是第 (i) 部分的密度函數把 λ 換成 $n\lambda$：T 服從參數為 $n\lambda$ 的指數分佈。所以我們可以由第 (i) 部分直接寫出

$$\mathrm{E}(T) = \frac{1}{n\lambda}, \qquad \mathrm{Var}(T) = \frac{1}{n^2\lambda^2}.$$

這合乎情理：有 n 名學生時，第一篇文章交到的時間，應該比任何指定一篇快大約 n 倍。

驗算

- 當 $n = 1$ 時只有一篇文章，所以 $T = U = T_1$；兩個密度函數的確都簡化為 $\lambda e^{-\lambda t}$。
- $P(U \le u)$ 由 $u = 0$ 時的 0 上升至 $u \to \infty$ 時的 1，符合分佈函數應有的性質。
- 我們以 $n = 5$、$\lambda = 0.7$ 模擬了 2×10^5 個班別。例如，$U \le 2$ 所佔的比例為 0.2425，對比 $(1 - e^{-1.4})^5 \approx 0.2427$；$T$ 的平均值為 0.2860，對比 $1/(5 \times 0.7) \approx 0.2857$。用辛普森法則（Simpson's rule）亦驗證了 f_U 的積分為 1。

常見錯誤

- 處理最小值時直接計算 $P(T \le t)$：「至少有一個 $T_i \le t$」並不是交集，所以不能分解成乘積。應該經由 $P(T > t)$ 來計算。
- 忘記說明乘積之所以成立，是因為獨立性。
- 寫成 $\mathrm{Var}(T_i) = E(T_i^2) = 2/\lambda^2$，忘記減去 $(E\,T_i)^2$。

STEP 之外

T 和 U 分別是樣本中最小和最大的順序統計量（order statistics）。獨立指數隨機變量的最小值仍服從指數分佈，而其率參數是各率參數之和，這是泊松過程（Poisson process）和排隊論（queueing theory）的基礎。由無記憶性（memoryless property）還可得出一個漂亮的結果：相繼兩篇文章之間的時間間隔是互相獨立的指數隨機變量，率參數依次為 $n\lambda, (n-1)\lambda, \ldots, \lambda$，所以 $E(U) = \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$。這兩個結果在 Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率入門），以及 Blitzstein 與 Hwang 的 *Introduction to Probability*（概率導論）中都有詳細討論。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。