詳細解答

STEP I 1994，第 11 題

力學 • 斜面上的連接質點

STEP I 1994，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

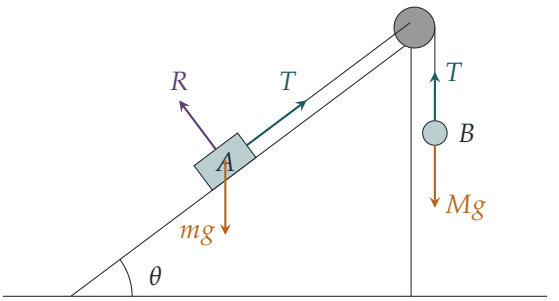
step.maths.org/questions/94-s1-q11

關鍵思路

先從幾何入手。繩子的長度恰好等於軌道的長度，所以當貨車位於底部時，小球正好懸在滑輪處。因此小球下落的距離就是斜面的高度 $d\sin\theta$，而貨車亦沿斜面向上移動相同的距離。繩子拉緊期間，整個系統以同一個恆定加速度運動。小球一着地，繩子便會鬆弛，貨車只是沿着光滑斜面向上滑行。所以第 (ii) 部分要問的是：貨車餘下的速率能否把它帶到滑輪處。

解答

我們把貨車和小球視為質點（particle），軌道視為光滑（smooth），繩子視為輕而不可伸長（light and inextensible），並跨過一個輕而無摩擦的滑輪（pulley）。因此兩邊的張力（tension）T 相同，而且在繩子拉緊期間，貨車和小球的速率相同。



第 (i) 部分

設 a 為小球向下的加速度，這也是貨車沿斜面向上的加速度。對小球（沿鉛垂方向）和對貨車（沿斜面方向）分別應用牛頓第二定律（Newton's second law），得

$$Mg - T = Ma,$$
$$T - mg\sin\theta = ma.$$

法向反作用力（normal reaction）R 與斜面垂直，並不出現在方程之中。把兩式相加便可消去 T：

$$a = \frac{(M - m\sin\theta)\,g}{M + m}.$$

系統由靜止開始，所以只有當 $a > 0$ 時小球才會移動。（若 $a \le 0$，則甚麼也不會發生：當 $a = 0$ 時系統保持平衡；而繩子不能推物，所以 $a < 0$ 是不可能的。）因此，小球落到地面，當且僅當

$$M > m\sin\theta.$$

當貨車位於軌道底部時，整條長度為 d 的繩子都貼着斜面，所以小球起初與滑輪同高，離地面的高度為 $d\sin\theta$。它由靜止開始以恆定加速度 a 下落這段距離，所以由 $v^2 = u^2 + 2as$ 得

$$v^2 = 2\cdot\frac{(M - m\sin\theta)g}{M + m}\cdot d\sin\theta = \frac{2g(M - m\sin\theta)\,d\sin\theta}{M + m},$$

這正是所要求的結果。

第 (ii) 部分

小球着地時，貨車已沿軌道向上移動了 $d\sin\theta$，並正以速率 v 運動。此時它與滑輪之間還餘下距離

$$d - d\sin\theta = d(1 - \sin\theta)$$

。

想一想 小球着地之後，繩子會怎樣？

小球停了下來，但貨車仍然沿斜面向上、朝着滑輪運動。所以繩子變得鬆弛，$T = 0$。這時沿斜面方向唯一的力就是重力的分量，所以貨車以 $g\sin\theta$ 減速。它再走一段距離 s 後便會靜止，這段距離由 $0 = v^2 - 2g\sin\theta\, s$ 給出：

$$s = \frac{v^2}{2g\sin\theta} = \frac{(M - m\sin\theta)\,d}{M + m}.$$

（其後貨車會滑回斜面下方，滑輪附近不會再有任何事情發生。）

如果貨車在到達滑輪之前停下，即 $s < d(1-\sin\theta)$，它便不會與滑輪相撞。由於 $d > 0$ 及 $M + m > 0$，這個條件等價於

$$\begin{aligned} M - m\sin\theta &< (M+m)(1-\sin\theta) \\ &= M + m - M\sin\theta - m\sin\theta, \end{aligned}$$

化簡後得 $M\sin\theta < m$。

把這個結果與第 (i) 部分結合起來，小球到達地面而貨車又在滑輪之前停下，恰好是在以下情況：

$$m\sin\theta < M < \frac{m}{\sin\theta}.$$

若 $M\sin\theta = m$，貨車剛好以零速率到達滑輪。那只是輕輕碰到，不算相撞。

驗算

- 貨車沿軌道向上所能到達的最遠距離是 $d\sin\theta + s = \dfrac{Md(1+\sin\theta)}{M+m}$。這個距離小於 d，恰好是在 $M\sin\theta < m$ 的時候，與上面的條件吻合。當 $m \to 0$ 時，它趨向 $d(1+\sin\theta) > d$：一輛沒有重量的貨車必定會撞上滑輪，正如你所預料的一樣。
- 當 $\theta = 90°$ 時，條件 $M < m$ 與第 (i) 部分的 $M > m\sin\theta = m$ 互相矛盾。這是對的：在鉛垂的軌道上，貨車從滑輪正下方的底部出發，小球從頂部出發，而貨車上升的距離恰好等於小球下落的距離，也就是一直升到滑輪處。
- 以數值計算，取 $m = 2$、$M = 1.5$、$\theta = 30°$、$d = 3$ 及 $g = 9.8$，公式給出 $v^2 = 4.2$，而最遠點為 $\frac{27}{14} \approx 1.93 < 3$。以細小的時間步長逐步模擬這個運動，得到相同的數值。隨機抽取的例子亦證實，相撞恰好在 $M\sin\theta > m$ 時發生。

常見錯誤

- 把小球下落的距離當作 d 而不是 $d\sin\theta$。小球從滑輪處出發，而滑輪的高度是 $d\sin\theta$。
- 假設小球着地後繩子仍然拉緊，或者完全忘記了滑行階段，只把 $d\sin\theta$ 與 d 作比較。
- 繩子鬆弛之後，計算貨車的減速度時用了 g 而不是 $g\sin\theta$。

STEP 之外

這道題把運動分成約束條件不同的幾個階段：先是繩子拉緊，然後是繩子鬆弛。這是單側約束（*unilateral constraint*）最簡單的例子：這種約束只能拉，不能推。這類約束在力

學中隨處可見，從滑落桌面的鏈條，到機械人學中的接觸問題都有。這裏用能量方法可以得到一個快捷的另解：在滑行階段，貨車的動能（kinetic energy）$\frac{1}{2}mv^2$ 轉化為勢能（potential energy）$mgs\sin\theta$。Kleppner 與 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）對這兩種觀點都有細緻的闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。