詳細解答

STEP I 1994，第 10 題

力學 • 圓周運動

STEP I 1994，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/94-s1-q10

關鍵思路

這是一個用可伸長的繩繫着的圓錐擺（conical pendulum）。質點沒有垂直方向的加速度，所以張力（tension）的垂直分量與重量平衡，而水平分量則提供向心力（centripetal force）。新的地方在於圓的半徑取決於伸長量（extension），而伸長量又取決於張力，於是虎克定律（Hooke's law）把一切連繫起來。至於不等式，則來自這個問題：$\cos\theta$ 取哪些值才真正描述一個圓？

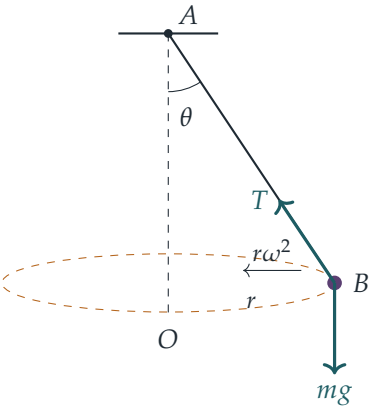
解答

求 $\cos\theta$

把 B 視為質點（particle），把 AB 視為符合虎克定律的輕彈性繩（light elastic string）。設伸長量為 x，張力為 T，則

$$T = \frac{\lambda x}{l}, \qquad AB = l + x.$$

質點繞着 A 正下方的點 O，在半徑為 $r = (l + x)\sin\theta$ 的水平圓上運動。作用於質點的力只有它的重量和沿 BA 方向的張力。



沿垂直方向分解（沒有垂直加速度）：

$$T\cos\theta = mg. \tag{1}$$

沿水平方向分解，指向圓心 O（加速度為 $r\omega^2$）：

$$T\sin\theta = m\omega^2(l+x)\sin\theta.$$

要是真正的圓，必須 $\sin\theta \neq 0$，所以可以把它約去：

$$T = m\omega^2(l+x). \tag{2}$$

現在由虎克定律得 $\lambda x/l = m\omega^2(l+x)$，即

$$x\left(\lambda - m\omega^2 l\right) = m\omega^2 l^2.$$

由於 $x > 0$（由 (1) 得 $T > 0$，所以繩處於拉伸狀態）而且 $m\omega^2 l^2 > 0$，可知 $\lambda - m\omega^2 l > 0$，並且

$$x = \frac{m\omega^2 l^2}{\lambda - m\omega^2 l}, \qquad l + x = \frac{l\lambda}{\lambda - m\omega^2 l}.$$

於是由 (2) 得

$$T = \frac{m\omega^2 l\lambda}{\lambda - m\omega^2 l},$$

再由 (1) 得

$$\boxed{\cos\theta = \frac{mg}{T} = \frac{g\left(\lambda - m\omega^2 l\right)}{l\lambda\,\omega^2}}$$

運動何時可能發生

? **想一想** 對 $\cos\theta$ 的每一個限制，在物理上各代表甚麼？

要質點在 A 下方的水平圓上運動，而且繩保持拉緊，我們需要 $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$，即 $0 < \cos\theta < 1$。反過來說，如果 ω 代入公式後得出 $0 < \cos\theta < 1$，那麼把上述步驟逆推回去（其中 $\lambda - m\omega^2 l > 0$），便會得到滿足 (1) 和 (2) 的正伸長量和正張力，所以這個運動確實存在。

上界。由於其餘因子均為正數，$\cos\theta > 0$ 成立當且僅當 $\lambda - m\omega^2 l > 0$。這就是

$$\omega^2 < \frac{\lambda}{ml}.$$

物理意義：如果 ω 太大，繩無論伸長多少（只要是有限的）都無法提供所需的向心力，因為多出來的長度所需要的額外的力，增長得比繩所能提供的還要快。

下界。$\cos\theta < 1$ 即是

$$g\lambda - gm\omega^2 l < l\lambda\omega^2 \iff g\lambda < \omega^2 l(\lambda + mg) \iff \omega^2 > \frac{g\lambda}{l(\lambda + mg)},$$

其中我們先除以 $l\lambda\omega^2 > 0$，最後除以 $l(\lambda + mg) > 0$，所以不等號的方向保持不變。物理意義：如果 ω 太小，公式便會要求 $\cos\theta \geq 1$；唯一的可能就是質點靜止地懸掛在軸上（$\theta = 0$），而這並不是圓周運動（circular motion）。

把兩者合起來，這個運動只有在以下條件下才可能發生：

$$\frac{g\lambda}{l(\lambda + mg)} < \omega^2 < \frac{\lambda}{ml},$$

這正是所要證明的結果。

驗算

- 在下界處，$\cos\theta = 1$：這時繩是垂直的，張力為 mg，長度為 $l(\lambda + mg)/\lambda$，恰好就是質點懸掛時的平衡長度。留意 $\omega^2 = g/(\text{該長度})$，即熟悉的圓錐擺臨界條件 $\omega^2 > g/L$。
- 當 $\lambda \to \infty$（不可伸長的繩）時，結果變成 $\cos\theta = g/(l\omega^2)$，即標準的圓錐擺，而範圍則變成 $\omega^2 > g/l$。
- 數值上，取 $g = 9.8$ 並隨機選取 m、l、λ 和 ω，直接用二分法（bisection）解虎克定律和水平方向的方程，所得的 $\cos\theta$ 與公式相同，而且兩條分解所得的方程都成立；在 20 000 個隨機個案中，運動存在當且僅當不等式成立。

常見錯誤

- 把半徑取為 $l\sin\theta$ 而不是 $(l+x)\sin\theta$：繩是被拉長了的。
- 忘記說明為何可以除以 $\sin\theta$，因而看不出為甚麼要排除 $\theta = 0$（從而排除 $\cos\theta = 1$）。
- 只證明了 $\cos\theta < 1$，卻忘記 $\cos\theta > 0$（等價於伸長量為正）才給出上界。

STEP 之外

這個上界是失控（runaway）或不穩定性（instability）的一個簡單例子：當 $\omega^2 \to \lambda/(ml)$ 時，所需的伸長量會趨向無窮大。同樣的效應也出現在旋轉的彈性桿以及自旋物體的穩定性之中；而下界則是一個分歧（bifurcation），懸掛的平衡狀態在那裏讓位予圓周運動。想進一步了解旋轉參考系中的力學，可參閱 Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。