詳細解答

STEP III 1993，第 9 題

純數學 • 平方和不等式

> **STEP III 1993，第 9 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/93-s3-q9

關鍵思路

這裏的每一條不等式（inequality），其實都是「平方和（sum of squares）非負」這句話的變裝。第 (i) 部分是最簡單的情形 $(a_1 - a_2)^2 \geq 0$，而其後各部分的做法，是把 $(a_i - a_j)^2$ 對所有數對求和，再數清楚每個平方項和每個乘積項各出現多少次。一旦得到一般形式 (iv)，把 $(\sum a_i)^2$ 展開成平方項加交叉項（cross terms），便可推出 (v)。

全文沿用以下記號：

$$S = \sum_{i=1}^{n} a_i^2, \qquad P = \sum_{i<j} a_i a_j,$$

其中第二個和式遍歷滿足 $1 \leq i < j \leq n$ 的 $\binom{n}{2}$ 個數對。

解答

第 (i) 部分

由於實數的平方非負，

$$0 \leq (a_1 - a_2)^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2,$$

所以 $a_1^2 + a_2^2 \geq 2a_1 a_2$，等號成立當且僅當 $a_1 = a_2$。

第 (ii) 部分

把 (i) 分別應用於三個數對，然後相加：

$$a_2^2 + a_3^2 \geq 2a_2a_3,$$
$$a_3^2 + a_1^2 \geq 2a_3a_1,$$
$$a_1^2 + a_2^2 \geq 2a_1a_2.$$

每個平方項恰好在其中兩行出現，所以相加後得

$$2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \geq 2(a_2a_3 + a_3a_1 + a_1a_2),$$

再除以 2 便得所求結果。換一個寫法，$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - (a_2a_3 + a_3a_1 + a_1a_2) = \frac{1}{2}\left[(a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_3)^2 + (a_3 - a_1)^2\right] \geq 0$，等號成立當且僅當 $a_1 = a_2 = a_3$。

第 (iii) 部分

現在滿足 $1 \leq i < j \leq 4$ 的數對 (i, j) 共有六個。把 (i) 應用於每一個數對：

$$\sum_{1\leq i<j\leq 4} (a_i^2 + a_j^2) \;\geq\; 2 \sum_{1\leq i<j\leq 4} a_ia_j.$$

在左邊，a_1^2 出現了多少次？每一個含有下標 1 的數對都令它出現一次，也就是與其餘三個下標各配對一次。每個 a_k^2 的情況都相同，所以左邊等於 $3(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)$，於是

$$3(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2) \geq 2(a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4 + a_2a_3 + a_2a_4 + a_3a_4),$$

這正是所求。

第 (iv) 部分

(i) 至 (iii) 的規律是：左邊的係數比變數的個數少一，依次為 1、2（即第 (ii) 部分乘以 2）、3。

斷言。對任意 $n \geq 2$ 及實數 $a_1, \ldots, a_n$，

$$(n-1)\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \;\geq\; 2 \sum_{1\leq i<j\leq n} a_ia_j, \qquad \text{即} \qquad (n-1)S \geq 2P,$$

等號成立當且僅當 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$。

? **想一想** 把 $a_i^2 + a_j^2$ 對每一個數對 $i < j$ 求和時，某個指定的 a_k^2 會出現多少次？

證明。考慮所有數對的差的平方之和：

$$D = \sum_{1\leq i<j\leq n} (a_i - a_j)^2 = \sum_{1\leq i<j\leq n} \left(a_i^2 + a_j^2\right) - 2 \sum_{1\leq i<j\leq n} a_ia_j.$$

下標 k 恰好屬於 $n-1$ 個數對（它與其餘 $n-1$ 個下標各配對一次），所以 a_k^2 在第一個和式中出現 $n-1$ 次。因此

$$D = (n-1)S - 2P.$$

D 的每一項都是實數的平方，所以 $D \geq 0$，由此得 $(n-1)S \geq 2P$。等號成立當且僅當每個 $(a_i - a_j)^2$ 都等於零，即當且僅當所有 a_i 都相等。 ■

取 $n = 2, 3, 4$，便分別重新得到 (i)、(ii) 的兩倍，以及 (iii)。

第 (v) 部分

這裏需要 $n \geq 2$，使得 $n - 1 > 0$。把和的平方展開，每個平方項出現一次，而每個 $i \neq j$ 的乘積 $a_i a_j$ 出現兩次（分別以 $a_i a_j$ 和 $a_j a_i$ 的形式），所以

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = S + 2P.$$

> ? **想一想** (iv) 給出的是 S 的界，它怎樣能幫助我們得到一個只提及 P 的界？

由於 $n - 1 > 0$，可以把 (iv) 除以 $n-1$ 而不必把不等號反轉，得 $S \geq \dfrac{2P}{n-1}$。把 S 的這個下界（lower bound）代入：

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 &= S + 2P \\ &\geq \frac{2P}{n-1} + 2P \\ &= \frac{2P + 2(n-1)P}{n-1} \\ &= \frac{2n}{n-1} \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j,\end{aligned}$$

這就是所求的不等式。等號成立當且僅當 (iv) 的等號成立，即所有 a_i 都相等。

留意我們從來不需要 P 為正數：整個論證只是在 $S \geq 2P/(n-1)$ 的兩邊同時加上 $2P$，無論 P 的正負如何，這一步都成立。

驗算

- 全部相等：若每個 $a_i = c$，則 $S = nc^2$ 及 $P = \binom{n}{2}c^2 = \frac{1}{2}n(n-1)c^2$，所以 $(n-1)S = n(n-1)c^2 = 2P$，而在 (v) 中兩邊都等於 n^2c^2。兩條不等式都取到等號，正如所料。
- 以數值檢驗 (iii)：取 $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (1, 2, -3, 5)$，得 $S = 39$ 及 $P = -7$，所以

$3S = 117 \geq -14 = 2P$；而在 (v) 中，$(\sum a_i)^2 = 25 \geq \frac{8}{3}(-7) = -\frac{56}{3}$。（另外 $S + 2P = 39 - 14 = 25$，亦正如所料。）

- 我們亦以有理數運算，在 20 000 個長度由 2 至 9 的隨機數組上，以及一些非常接近等號情況的數組上，精確地檢驗了恆等式（identity）$D = (n-1)S - 2P$ 和兩條不等式，並沒有發現反例（counterexample）。

常見錯誤

- 數錯次數：每個 a_k^2 在 $\sum_{i<j}(a_i^2 + a_j^2)$ 中出現 $n-1$ 次，不是 n 次，也不是 $\binom{n}{2}$ 次。
- 寫成 $(\sum a_i)^2 = S + P$：每個交叉項在展開式中出現兩次。
- 把 (iv) 除以 $n-1$ 時沒有指出 $n - 1 > 0$，或忘記說明等號成立的情況。

STEP 之外

$D = (n-1)S - 2P$ 這個量等於各數與平均值之差的平方和的 n 倍，即 $n\sum(a_i - \bar{a})^2$，所以 (iv) 其實是在說方差（variance）非負。第 (v) 部分也可以看成柯西–施瓦茲不等式（Cauchy–Schwarz inequality）$(\sum a_i \cdot 1)^2 \leq n\sum a_i^2$ 的變裝。在線性代數（linear algebra）中，這是說二次型（quadratic form）$(n-1)S - 2P$ 是半正定（positive semi-definite）的，而它的核（kernel）由全一向量張成。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門）講述二次型與正定性，而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（進階數學難題）則提供更多 STEP 風格的不等式練習。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。