詳細解答

STEP III 1993，第 8 題

純數學 • 三維空間中的平面與直線

STEP III 1993，第 8 題

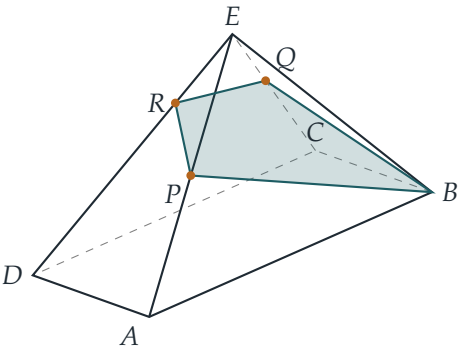
繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/93-s3-q8

關鍵思路

每條斜棱都是連接底面一個頂點與 E 的線段，所以斜棱上的每一點都有簡單的參數式（parametric form）。因此 P、Q 和 R 可以一下子全部寫出來，而通過 B、P 和 Q 的平面可以寫成一條線性方程，其係數由代入這幾點而得。至於第二部分，判斷平行四邊形（parallelogram）最簡潔的方法，是檢查兩條對角線是否互相平分（bisect）；只需看一個坐標，便足以說明這個條件不成立。

解答



求 γ

棱 AE 由所有形如 $(ta, 0, (1-t)a)$ 的點組成，其中 $0 \le t \le 1$，因為沿着這條棱有 $x+z=a$。同樣地，CE 是 $\{(-ta, 0, (1-t)a)\}$，而 DE 是 $\{(0, -ta, (1-t)a)\}$。所以

$$P = (\lambda a,\, 0,\, (1-\lambda)a), \qquad Q = (-\mu a,\, 0,\, (1-\mu)a), \qquad R = (0,\, -\gamma a,\, (1-\gamma)a).$$

我們設平面 BPQ 的方程為

$$px + qy + rz = a.$$

B、P、Q 三點不共線（collinear），所以它們確定唯一的一個平面。只要能找到滿足全部三個條件的 p, q, r，這條方程就是該平面的方程。逐點代入：

$$\begin{aligned} B:&\quad qa = a, && \text{所以} q = 1,\\ P:&\quad p\lambda + r(1-\lambda) = 1,\\ Q:&\quad -p\mu + r(1-\mu) = 1. \end{aligned}$$

要消去 p，可把 P 的方程乘以 μ，把 Q 的方程乘以 λ，然後相加：

$$r(\mu - \lambda\mu + \lambda - \lambda\mu) = \lambda + \mu, \qquad \text{所以} \qquad r = \frac{\lambda+\mu}{\lambda+\mu-2\lambda\mu}.$$

分母是 $\lambda(1-\mu) + \mu(1-\lambda) > 0$，所以這樣做沒有問題。（下文用不着，但順帶一提：$p = (\lambda-\mu)/(\lambda+\mu-2\lambda\mu)$。）

現在 R 位於這個平面上，所以

$$-\gamma + r(1-\gamma) = 1 \quad\Longrightarrow\quad \gamma(1+r) = r-1 \quad\Longrightarrow\quad \gamma = \frac{r-1}{r+1}.$$

把各項通分，公分母為 $\lambda+\mu-2\lambda\mu$：

$$r-1 = \frac{2\lambda\mu}{\lambda+\mu-2\lambda\mu}, \qquad r+1 = \frac{2(\lambda+\mu-\lambda\mu)}{\lambda+\mu-2\lambda\mu},$$

因此

$$\gamma = \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu-\lambda\mu},$$

這正是所求。

值得留意的是 $0 < \gamma < 1$，所以 R 確實位於棱 DE 上，並且嚴格地在 D 與 E 之間。它為正數是顯然的。至於 $\gamma < 1$，分母比分子大了 $\lambda+\mu-2\lambda\mu = \lambda(1-\mu) + \mu(1-\lambda) > 0$。

$BPRQ$ 不是平行四邊形

想一想 按給定次序排列的四個點是否構成平行四邊形，最快捷的判斷方法是甚麼？

四邊形 $BPRQ$ 是平行四邊形，當且僅當它的對角線 BR 與 PQ 互相平分，即

$$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}.$$

（這等價於 $\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{QR}$，即有一組對邊相等且平行。）比較等式兩邊的 y 坐標：

$$\text{左邊：}a-\gamma a=(1-\gamma)a,\qquad \text{右邊：}0+0=0.$$

兩者必須相等，這就迫使 $\gamma=1$。但我們已證明 $\gamma<1$；事實上，$\gamma=1$ 會令 R 落在 E 上。所以兩條對角線永遠不會互相平分，$BPRQ$ 不可能是平行四邊形。 ■

為求完整，補充一點：四邊形的頂點確實是按 B,P,R,Q 的次序環繞排列的，因為平面依循環次序 EB,EA,ED,EC 與四條斜棱相交。即使把這幾點另行配對，也無濟於事。$B+P=Q+R$ 和 $B+Q=P+R$ 在 y 坐標上都需要 $a=-\gamma a$，而由於 $\gamma>0$，這是不可能的。

也可以從幾何角度看出同一結論：BP 位於面 ABE 上，而 QR 位於面 CDE 上。這兩個面相交於通過 E 且與 AB 平行的直線。分別位於這兩個平面上的兩條平行線，必定與這條公共直線平行。所以 $BP\parallel QR$ 會迫使 $BP\parallel AB$，而由於 $P\neq A$，這是不可能的。

驗算

- 對稱情況 $\lambda=\mu$：公式給出 $\gamma=\lambda/(2-\lambda)$。取 $\lambda=\mu=\frac{1}{2}$，結果是 $\frac{1}{3}$。直接計算：$p=0$，$r=2$，平面為 $y+2z=a$，它與 DE 相交於 $(0,-\frac{1}{3}a,\frac{2}{3}a)$，與預期相符。
- 極限 $\lambda,\mu\to1$：$P\to A$，$Q\to C$，平面變成底面，而 $\gamma\to1$，所以 $R\to D$，正如所料。
- 一個簡潔的改寫是 $\dfrac{1-\gamma}{\gamma}=\dfrac{1-\lambda}{\lambda}+\dfrac{1-\mu}{\mu}$，很容易用數值來檢驗。例如 $\lambda=\frac{1}{2}$，$\mu=\frac{2}{5}$ 給出 $\gamma=\frac{2}{7}\approx0.2857$。
- 我們隨機選取了 2000 組 a,λ,μ，以分數作精確計算，核實了公式、$0<\gamma<1$ 以及關於平行四邊形的結論。我們另外用獨立的方法求出 R，即利用叉積（cross product）求平面的法向量（normal）。

常見錯誤

- 把 AE 的參數式寫錯：在 AE 上，坐標滿足 $x+z=a$ 及 $y=0$，所以 P 的 z 坐標是 $(1-\lambda)a$，而不是 λa。

- 只在平面圖上用斜率來檢驗 $BP \parallel QR$。這個四邊形位於一個傾斜的平面上，所以應該用三維向量來處理。
- 忘記證明 $\gamma < 1$，而這正是平行四邊形的論證所需要的。

STEP 之外

求平面與直線的交點，是解線性方程組（linear system）最簡單的情況。由於 $EP : PA = (1-\lambda) : \lambda$，其他棱上的情況亦類似，所以結果說明

$$\frac{ER}{RD} = \frac{EP}{PA} + \frac{EQ}{QC},$$

這是一個不依賴坐標的命題，對任何通過 B 的平面都成立。因為它只用到直線上的比，所以對每一個以平行四邊形為底的棱錐（pyramid）都成立：任何這樣的棱錐都可以經仿射映射（affine map）變成本題的棱錐。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門）對平面、法向量和線性方程組有完整而嚴謹的闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。