詳細解答

STEP III 1993，第 7 題

純數學 • 雙曲函數聯立方程

> **STEP III 1993，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/93-s3-q7

關鍵思路

把兩個二倍角的 sinh 展開。第二條方程隨即直接以 y 表示 $\cosh x$，再用它去除第一條方程，便可同樣以 y 表示 $\sinh x$。利用恆等式（identity）$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ 可把 x 完全消去，剩下一條只含 $\sinh^2 y$ 的方程。之後要做的，就是找出三次方程（cubic）中合適的那個根，並以數值方法把它準確定出。

解答

消去 x

利用 $\sinh 2u = 2\sinh u \cosh u$，兩條方程變成

$$2\sinh x \cosh x = \cosh y, \qquad 2\sinh y \cosh y = 2\cosh x.$$

由第二條方程得

$$\cosh x = \sinh y \cosh y.$$

由於 $\cosh x \geq 1 > 0$，我們可以把第一條方程除以 $2\cosh x$：

$$\sinh x = \frac{\cosh y}{2\sinh y \cosh y} = \frac{1}{2\sinh y},$$

其中除以 $\cosh y$ 並無問題，因為 $\cosh y > 0$；而 $\sinh y \neq 0$，因為 $\sinh y \cosh y = \cosh x \neq 0$。

現在把兩者代入 $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$。設 $t = \sinh^2 y$，則 $\cosh^2 y = 1 + t$：

$$t(1+t) - \frac{1}{4t} = 1.$$

兩邊乘以 $4t$（它不等於零），得 $4t^2 + 4t^3 - 1 = 4t$，即

$$4t^3 + 4t^2 - 4t - 1 = 0,$$

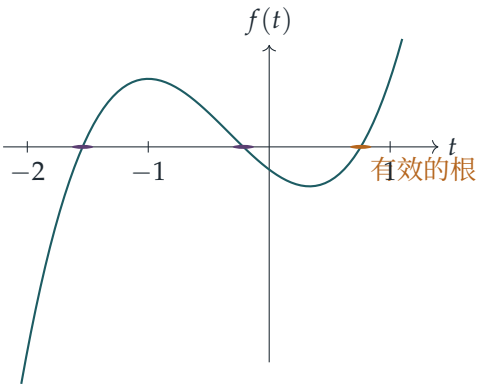
所以 $t = \sinh^2 y$ 是題目所給三次方程的一個根，正如所求。

最多只有一個有效解

設 $f(t) = 4t^3 + 4t^2 - 4t - 1$。由於 $t = \sinh^2 y$ 而 $\sinh y \neq 0$，有效的根必須滿足 $t > 0$。現在

$$f(-2) = -9, \quad f(-1) = 3, \quad f(0) = -1, \quad f(1) = 3,$$

所以根據介值定理（intermediate value theorem），這個三次方程在 $(-2, -1)$、$(-1, 0)$ 和 $(0, 1)$ 每個區間內各有一個根。三次方程最多有三個根，所以這些就是全部的根，而且恰好只有一個根是正數。



想一想 一個正的 t 給出兩個值 $\sinh y = \pm\sqrt{t}$。為甚麼只有一個能保留下來？

由 $\cosh x = \sinh y \cosh y$ 以及 $\cosh x > 0$、$\cosh y > 0$，可知必須有 $\sinh y > 0$。所以 $\sinh y = +\sqrt{t}$，而由於 sinh 是嚴格遞增（strictly increasing）的，這恰好給出一個 y，且 $y > 0$。因此，這個三次方程最多給出一個有效的 y（然後 $\sinh x = 1/(2\sinh y)$ 便唯一地確定 x，因為 sinh 是一對一（one-to-one）的）。

確定 t 的位置並計算其值

我們有

$$f(0.7) = 1.372 + 1.96 - 2.8 - 1 = -0.468 < 0,$$
$$f(0.8) = 2.048 + 2.56 - 3.2 - 1 = 0.408 > 0,$$

所以根據介值定理，正根位於 0.7 與 0.8 之間。

我們使用牛頓–拉弗森迭代法（Newton–Raphson iteration）

$$t_{n+1} = t_n - \frac{f(t_n)}{f'(t_n)}, \qquad f'(t) = 12t^2 + 8t - 4,$$

以中點 $t_0 = 0.75$ 為起始值。這裏 $f(0.75) = -0.0625$，$f'(0.75) = 8.75$，所以

$$\begin{aligned} t_1 &= 0.75 + \frac{0.0625}{8.75} = 0.7571429, \\ t_2 &= 0.7570685, \\ t_3 &= 0.75706846, \end{aligned}$$

而 t_4 與 t_3 在所示的各位數字上完全一致。為確認六位小數，我們檢查正負號的變化

$$f(0.7570680) < 0 < f(0.7570690),$$

所以根位於該區間內，而

$$t = 0.757068 \text{ （準確至六位小數）}.$$

（另一個較慢但完全可行的方法：把方程重新整理為 $t^2(4t+4) = 4t+1$，即 $t = \sqrt{(4t+1)/(4t+4)}$。在根的附近，右邊的導數（derivative）約為 0.16，所以這個迭代收斂（converge），每一步增加略少於一位準確的小數。）

求 y 和 x

取正平方根，$\sinh y = \sqrt{0.7570685} = 0.870097$，所以

$$y = \operatorname{arsinh}(0.870097) = \ln\left(0.870097 + \sqrt{1.757068}\right) = 0.786474,$$

並且

$$\sinh x = \frac{1}{2\sinh y} = 0.574649, \qquad x = \ln\left(0.574649 + \sqrt{1.330221}\right) = 0.546965.$$

代入原來的方程驗算：

$$\begin{aligned} \sinh 2x &= 1.325545 = \cosh y, \\ \sinh 2y &= 2.306704 = 2\cosh x, \end{aligned}$$

所以兩條方程都成立。準確至四位小數，

$$x = 0.5470, \qquad y = 0.7865.$$

驗算

- 三次方程的另外兩個根約為 -0.2140 和 -1.5431：兩者皆為負數，正如論證所要求。三個根的乘積是 $\frac{1}{4}$，這與 $0.757068 \times 0.2140 \times 1.5431 \approx 0.250$ 吻合。
- 直接在 $y \in [-5, 5]$ 上作數值搜尋，由第二條方程取 $x = \pm \operatorname{arcosh}(\frac{1}{2}\sinh 2y)$ 並檢驗第一條方程，結果只找到一個解，位於 $y \approx 0.7865$，且 $x > 0$。
- 若取負值 $\sinh y = -\sqrt{t}$，則 $\sinh y \cosh y < 0$，這絕不可能等於 $\cosh x$：這樣便可迅速確認它確實無效。

常見錯誤

- 過早平方（例如把原來的兩條方程都平方），之後卻忘記捨去不合適的正負號。
- 兩個迭代值一旦在六位小數上一致便停止迭代，而沒有檢查捨入區間兩端的正負號變化。
- 先把 t 捨入至六位小數，然後才取平方根和對數。應保留額外的位數，只在最後才把 x 和 y 捨入。

STEP 之外

這裏的兩種迭代收斂的速度相差甚遠。不動點迭代（fixed-point iteration）$t \mapsto g(t)$ 是線性收斂的，每一步誤差大約縮小至原來的 $|g'(\text{根})|$ 倍；而牛頓–拉弗森迭代法則是二次收斂（quadratic convergence）的，每一步正確的位數大約增加一倍。要把這一點說得嚴謹，需要用到均值定理（mean value theorem）和泰勒定理（Taylor's theorem），而這正是數值分析（numerical analysis）的起點。至於背後的分析，可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*（一本實分析入門書）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。