詳細解答

STEP III 1993，第 6 題

純數學 • 阿根圖上的軌跡

> **STEP III 1993，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/93-s3-q6

關鍵思路

對圓而言，$|z-k|=r$ 是最自然的描述；利用 $|u|^2=uu^*$ 把它平方，便得到一條只含 z 和 z^*、不帶平方根的方程。軌跡（locus）一旦寫成這種形式，像 $w=z/(z-1)$ 這樣的莫比烏斯映射（Möbius map）就很容易處理：先求逆，把 z 用 w 表示，然後代入、消去分母，再與一般形式比較，讀出新的圓心和半徑。

解答

圓的方程

P 在圓上，當且僅當它與 K 的距離為 r，即 $|z-k|=r$。兩邊平方，並利用 $|u|^2=uu^*$ 及 $(z-k)^*=z^*-k^*$，

$$r^2=(z-k)(z^*-k^*)=zz^*-kz^*-k^*z+kk^*,$$

所以 $zz^*-kz^*-k^*z+kk^*-r^2=0$，正是所求。

反過來，任何形如 $ww^*-cw^*-c^*w+cc^*-s^2=0$（其中 $s>0$）的方程都表示 $|w-c|^2=s^2$，所以它是圓心為 c、半徑為 s 的圓。下文會用這一點來辨認圓。

P 的軌跡

以 OA 為直徑的圓，圓心為 i（即 0 與 $2i$ 的中點），半徑為 1。取 $k=i$、$k^*=-i$、$kk^*=1$ 及 $r=1$，由第一部分得

$$zz^*+iz-iz^*=0. \qquad (*)$$

Q_1 的軌跡 L

留意 $z = 1$ 不在圓上（它與 i 的距離是 $\sqrt{2}$），所以對每一點 P，$w_1 = z/(z-1)$ 都有定義。把 w_1 記作 w。從 $w(z-1) = z$ 解出 z，得

$$z = \frac{w}{w-1}, \qquad z^* = \frac{w^*}{w^*-1},$$

而且 $w \neq 1$，因為 $w = 1$ 就要求 $z = z - 1$。代入 $(*)$：

$$\frac{ww^*}{(w-1)(w^*-1)} + \frac{iw}{w-1} - \frac{iw^*}{w^*-1} = 0.$$

各項乘以 $(w-1)(w^*-1)$（它不等於零），

$$\begin{aligned} 0 &= ww^* + iw(w^*-1) - iw^*(w-1) \\ &= ww^* + iww^* - iw - iww^* + iw^* \\ &= ww^* - iw + iw^*. \end{aligned}$$

所以 L 的方程是

$$w_1 w_1^* - iw_1 + iw_1^* = 0.$$

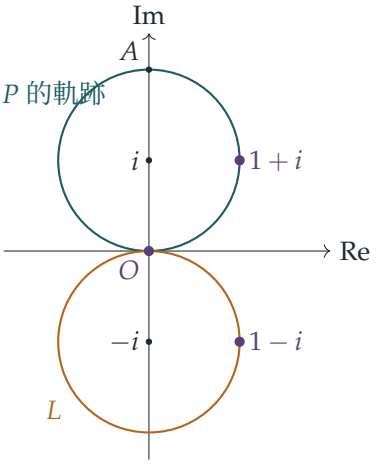
要辨認它，可與一般形式比較：我們需要 $-k^* = -i$ 及 $-k = i$，所以 $k = -i$；於是 $kk^* = 1$，而常數項 $kk^* - r^2$ 等於 0，所以 $r = 1$。因此 L 是圓心為 $-i$、半徑為 1 的圓，即 $|w_1 + i| = 1$。它是 P 所在的圓對實軸（real axis）的反射，而且同樣通過原點。

> **想一想** 這個圓上的每一點是否真的都能取到，還是只取到其中一部分？

以上每一步都可以逆推。若 $w \neq 1$ 在 $|w + i| = 1$ 上，則 $z = w/(w-1)$ 滿足 $(*)$，所以它是圓上的一點 P，並且 $w_1 = w$。唯一可能取不到的點是 $w = 1$，但它不在 L 上，因為 $|1 + i| = \sqrt{2}$。所以軌跡是整個圓。

Q_2 的軌跡

對 $|z - i| = 1$ 取共軛（conjugate），得 $|z^* + i| = 1$，因為 $|u^*| = |u|$ 而 $(z-i)^* = z^* + i$。所以 $w_2 = z^*$ 滿足 $|w_2 + i| = 1$。當 z 走遍以 i 為圓心的整個圓時，z^* 走遍以 $-i$ 為圓心的整個圓。換個說法，對 $(*)$ 取共軛得 $z^*z - iz^* + iz = 0$，這正是以 $w = z^*$ 代入的 L 的方程。所以 Q_2 的軌跡也是 L。



Q_1 與 Q_2 何時重合

我們需要 $\dfrac{z}{z-1} = z^*$，即

$$z = zz^* - z^*.$$

在圓上，由 $(*)$ 得 $zz^* = iz^* - iz$。代入，

$$z = iz^* - iz - z^* \quad \Longrightarrow \quad (1+i)z = (i-1)z^*.$$

其中一個解是 $z = 0$。否則 $z^* \neq 0$，而

$$\frac{z}{z^*} = \frac{i-1}{1+i} = \frac{(i-1)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2i}{2} = i.$$

設 $z = \rho \mathrm{e}^{i\theta}$，其中 $\rho > 0$，上式即 $\mathrm{e}^{2i\theta} = i$，所以 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{5\pi}{4}$：P 在直線 $y = x$ 上。這條直線與圓 $x^2 + (y-1)^2 = 1$（即 $x^2 + y^2 = 2y$）相交於 $2x^2 = 2x$ 之處，即 $x = 0$ 或 $x = 1$。非零的那一點是 $z = 1 + i$。

逐一驗證：$z = 0$ 給出 $w_1 = 0 = z^*$；而 $z = 1 + i$ 給出

$$w_1 = \frac{1+i}{i} = 1 - i = z^*.$$

所以 Q_1 與 Q_2 重合，當且僅當 P 是原點或點 $1 + i$。這正是 $y = x$ 與圓相交的兩點，而 $Q_1 = Q_2$ 的共同位置是 0 和 $1 - i$。

驗算

- 取一個樣本點：$P = 2i$（即點 A）給出 $w_1 = \frac{2i}{2i-1} = \frac{4-2i}{5}$，而 $|w_1 + i| = \left|\frac{4+3i}{5}\right| = 1$，所以它在 L 上。

- 數值上，我們在 $|z-i|=1$ 上隨機取了 10^4 個點，確認 $z/(z-1)$ 和 z^* 都滿足 $|w+i|=1$，誤差在 10^{-9} 以內。再沿圓周掃描 2×10^5 個點，尋找滿足 $\left|z/(z-1)-z^*\right|<10^{-3}$ 的點，結果只找到 $z=0$ 和 $z=1+i$。

常見錯誤

- 沒有先把 $z=0$ 分開處理就除以 z^*，因而漏掉 $P=O$ 這個解。
- 得出 $z/z^*=i$ 便就此停筆：這只確定了 P 的方向，你還要求出該直線與圓的交點。
- 把 $ww^*-iw+iw^*=0$ 與一般形式對照時，弄錯 k 的正負號。w^* 的係數是 $-k$，所以 $k=-i$，而不是 i。

STEP 之外

映射 $z\mapsto z/(z-1)$ 是一個莫比烏斯變換（Möbius transformation），這類映射總是把圓和直線映到圓和直線。這裏的像圓恰好是原來那個圓的鏡像，所以取共軛會得出同一個軌跡。取共軛本身會把定向（orientation）反轉，所以它不是莫比烏斯變換；但把它與莫比烏斯映射複合，便得到「反莫比烏斯」（anti-Möbius）映射，當中包括對圓的反射。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《複分析：可視化方法》）以優美的幾何手法講解莫比烏斯映射、反演（inversion）和保圓性質。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。