詳細解答

# STEP III 1993，第 4 題

純數學 • 級數求和

> **STEP III 1993，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/93-s3-q4

## 關鍵思路

每個級數（series）其實都是我們熟悉的級數，只是換了個樣子。求級數之和的慣常做法，是認出它是某個標準展開式（對數、等比級數（geometric series）或其導數（derivative））在某一點的取值，又或者把通項拆開，使各項在求和時逐項相消（telescope）。因此在每一部分，我們都要問：它可能是哪一個標準級數？要乘上甚麼、怎樣求導或怎樣重排，才能把它化成那個形式？

## 解答

### 第 (i) 部分

奇數分母 $1,3,5,\ldots$ 令人想到只剩下奇次冪的對數級數。當 $|x|<1$ 時，

$$\ln(1+x)=x-\tfrac{x^2}{2}+\tfrac{x^3}{3}-\cdots, \qquad \ln(1-x)=-x-\tfrac{x^2}{2}-\tfrac{x^3}{3}-\cdots,$$

兩式相減便消去偶次冪：

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\right)=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

題目的級數是 $\sum x^{2n}/(2n+1)$，其中 $x=\frac{1}{2}$。這裏的冪是偶數次，所以我們除以 $x$（因為 $x\neq 0$，這樣做是容許的）：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}=\frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

當 $x = \frac{1}{2}$ 時，此點位於收斂區間（interval of convergence）之內，$\frac{1+x}{1-x} = \frac{3/2}{1/2} = 3$ 而 $\frac{1}{2x} = 1$，所以

$$1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \cdots = \ln 3.$$

**第 (ii) 部分**

係數以 4 為週期重複：$x^{4k}, x^{4k+1}, x^{4k+2}, x^{4k+3}$ 的係數分別是 $2, -1, 0, -1$。於是我們把每四項歸為一組：

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^{4k}\,(2 - x - x^3) = \frac{2 - x - x^3}{1 - x^4},$$

這是公比為 $x^4$ 的等比級數，由於 $|x^4| < 1$，它是收斂的。這樣分組是合理的，因為原來的級數在 $|x| < 1$ 時絕對收斂（converges absolutely）：它各項的絕對值不超過 $2|x|^m$。

現在化簡。分子在 $x = 1$ 時等於零，所以 $1 - x$ 是它的因式：

$$2 - x - x^3 = (1 - x)(x^2 + x + 2), \qquad 1 - x^4 = (1 - x)(1 + x)(1 + x^2).$$

約去 $1 - x$（因為 $|x| < 1$，它不等於零），

$$\frac{x^2 + x + 2}{(1 + x)(1 + x^2)} = \frac{A}{1 + x} + \frac{Bx + C}{1 + x^2}.$$

代入 $x = -1$ 得 $2 = 2A$，所以 $A = 1$。於是 $x^2 + x + 2 - (1 + x^2) = x + 1 = (Bx + C)(1 + x)$，所以 $B = 0$ 及 $C = 1$。因此

$$2 - x - x^3 + 2x^4 - \cdots = \frac{1}{1 + x} + \frac{1}{1 + x^2}.$$

這個結果很容易驗證：$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots$ 加上 $1 - x^2 + x^4 - \cdots$，所得的係數正是 $2, -1, 0, -1, 2, \ldots$，符合要求。

**第 (iii) 部分**

把通項寫成

$$\frac{r\,2^{r-2}}{3^{r-1}} = \frac{1}{2}\,r\left(\frac{2}{3}\right)^{r-1}.$$

**?** **想一想** 我們以前在哪裏見過 $\sum ry^{r-1}$？

它是等比級數的導數。當 $|y| < 1$ 時，把 $\sum_{r=0}^{\infty} y^r = \frac{1}{1-y}$ 逐項求導（在收斂區間之內這樣做是成立的），得

$$\sum_{r=1}^{\infty} r y^{r-1} = \frac{1}{(1 - y)^2}.$$

取 $y=\frac{2}{3}$，其值為 $\frac{1}{(1/3)^2}=9$。我們的和由 $r=2$ 開始，所以要減去 $r=1$ 的一項，即 1：

$$\sum_{r=2}^{\infty}\frac{r\,2^{r-2}}{3^{r-1}}=\frac{1}{2}(9-1)=4.$$

**第 (iv) 部分**

由於 $r(r^2-1)=(r-1)r(r+1)$ 是三個連續整數之積，我們嘗試把它寫成兩個相鄰的「成對」分數之差：

$$\frac{1}{(r-1)r}-\frac{1}{r(r+1)}=\frac{(r+1)-(r-1)}{(r-1)r(r+1)}=\frac{2}{r(r^2-1)}.$$

因此求和時各項逐項相消。由 $r=2$ 加至 $N$，除了首尾兩項之外，其餘各項全部抵消：

$$\sum_{r=2}^{N}\frac{2}{r(r^2-1)}=\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{N(N+1)}.$$

當 $N\to\infty$ 時，最後一項趨向 0，所以

$$\sum_{r=2}^{\infty}\frac{2}{r(r^2-1)}=\frac{1}{2}.$$

## 驗算

- (i)：首四項之和為 $1+0.0833+0.0125+0.0022\approx 1.098$，已經很接近 $\ln 3\approx 1.0986$。
- (ii)：當 $x=0$ 時，兩邊都等於 2。當 $x=\frac{1}{2}$ 時，閉合形式（closed form）給出 $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=\frac{22}{15}$，與部分和（partial sums）的數值吻合。
- (iii)：最初幾項是 $\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{16}{27},\ldots$；部分和緩緩上升，趨向 4。
- (iv)：加至 $N=4$ 的部分和是 $\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{30}=\frac{9}{20}=\frac{1}{2}-\frac{1}{20}$，與公式吻合。

## 常見錯誤

- 在 (i) 中忘記除以 $x$：$\sum x^{2n+1}/(2n+1)$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 的值是 $\frac{1}{2}\ln 3$，而不是 $\ln 3$。
- 在 (iii) 中由 $r=1$ 開始求和，卻忘記減去原本沒有的第一項，結果得出 $\frac{9}{2}$。
- 在 (iv) 中誤用 $\frac{1}{r-1}-\frac{1}{r+1}$ 來相消：這樣拆開的是 $\frac{2}{r^2-1}$，而不是 $\frac{2}{r(r^2-1)}$。

## STEP 之外

我們剛才不假思索便做了的幾步（在 (ii) 中把各項重新分組，以及在 (iii) 中把冪級數（power series）逐項求導），正是大學第一門分析（analysis）課程要嚴格論證的內容。冪

級數在其收斂半徑（radius of convergence）之內絕對收斂，並且可以逐項求導；但若一個級數只是條件收斂（converges conditionally），重排它的各項便可能改變它的和（黎曼（Riemann）重排定理）。Abbott 的 *Understanding Analysis* 對這兩點都有仔細的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。