詳細解答

# STEP III 1993，第 3 題

純數學 • 矩陣的 LU 分解

> **STEP III 1993，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/93-s3-q3

## 關鍵思路

把 **M** 寫成一個下三角矩陣（lower-triangular matrix）乘以一個上三角矩陣（upper-triangular matrix）（即 *LU* 分解（LU decomposition）），整個問題就化為一連串只含一個未知數的方程。把 **AB** 乘開，再按合理的次序逐項對照：這樣每條新方程都只含一個未知數，既求出各個數值，也同時得出它們的唯一性（uniqueness）。三角矩陣的逆矩陣（inverse）亦容易求出，而 $\mathbf{Mx} = \mathbf{v}$ 則可拆成兩個容易求解的三角方程組。

**先提一個警告**。試卷上印的是 $e = 1$，但這是印刷錯誤：正確的值是 $e = -1$。若 $e = 1$，**AB** 最底一行就會是 (3, 10, 1)，而不是 (3, 8, 7)。以下一律採用 $e = -1$。

## 解答

### 求 A 和 B

乘開後得

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} a & ap & aq \\ b & bp + c & bq + cr \\ d & dp + e & dq + er + f \end{pmatrix}.$$

令上式等於 **M**，並按以下次序逐一處理各元素，使每條方程都只剩下一個未知數。

- 元素 $(1,1)$：$a = 1$。
- 元素 $(1,2)$、$(1,3)$：$ap = 3$ 及 $aq = 2$，所以 $p = 3$，$q = 2$（因為 $a = 1$）。
- 元素 $(2,1)$、$(3,1)$：$b = 4$，$d = 3$。
- 元素 $(2,2)$：$bp + c = 13$，所以 $c = 13 - 12 = 1$。

- 元素 $(2,3)$：$bq + cr = 5$，所以 $8 + r = 5$，得 $r = -3$（用到 $c = 1$）。
- 元素 $(3,2)$：$dp + e = 8$，所以 $9 + e = 8$，得 $e = -1$。
- 元素 $(3,3)$：$dq + er + f = 7$，所以 $6 + 3 + f = 7$，得 $f = -2$。

每個未知數都是由一條其餘各量均已知的方程迫出來的，而過程中只曾除以 $a = 1$ 和 $c = 1$，兩者皆不為零。因此，若 $\mathbf{M} = \mathbf{AB}$，各未知數就必須取這些值。反過來，這些值確實滿足全部九條方程。所以解存在而且唯一：

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

其中 $a = 1$，$b = 4$，$c = 1$，$d = 3$，$e = -1$，$f = -2$，$p = 3$，$q = 2$，$r = -3$。

**想一想** 唯一性從何而來？我們只是找到了一個解而已。

唯一性來自推導的次序。整個過程中沒有任何一步需要作出選擇。每條方程都是關於單一個新未知數的線性方程，而且係數不為零，所以恰好只有一個解。因此，任何符合題目所給形式並滿足 $\mathbf{AB} = \mathbf{M}$ 的 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$，都必定是上面那一對。（$\mathbf{B}$ 對角線上的 $1$ 十分重要：沒有它們，我們就可以把 $\mathbf{A}$ 放大、同時把 $\mathbf{B}$ 縮小。）

### 逆矩陣

要求 $\mathbf{A}$ 的逆矩陣，我們由上而下解 $\mathbf{Au} = \mathbf{v}$：

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1, \\ u_2 &= v_2 - 4u_1 = -4v_1 + v_2, \\ -2u_3 &= v_3 - 3u_1 + u_2 = -7v_1 + v_2 + v_3 \implies u_3 = \tfrac{1}{2}(7v_1 - v_2 - v_3). \end{aligned}$$

要求 $\mathbf{B}$ 的逆矩陣，我們由下而上解 $\mathbf{Bw} = \mathbf{u}$：

$$\begin{aligned} w_3 &= u_3, \\ w_2 &= u_2 + 3w_3 = u_2 + 3u_3, \\ w_1 &= u_1 - 3w_2 - 2w_3 = u_1 - 3u_2 - 11u_3. \end{aligned}$$

讀出各係數，得

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -11 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

乘開即可確認 $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$ 及 $\mathbf{BB}^{-1} = \mathbf{I}$。留意下（上）三角矩陣的逆矩陣仍然是下（上）三角矩陣。

### 聯立方程

這組聯立方程（simultaneous equations）就是 $\mathbf{Mx} = \mathbf{v}$，其中 $\mathbf{x} = (x, y, z)^{\mathrm{T}}$，$\mathbf{v} = (7, 18, 25)^{\mathrm{T}}$。由於 $\mathbf{M} = \mathbf{AB}$，

$$\mathbf{x} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{v} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{v}.$$

注意次序：$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$。首先，

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ -28 + 18 \\ \frac{1}{2}(49 - 18 - 25) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix},$$

然後

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 7 + 30 - 33 \\ -10 + 9 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

所以唯一解是

$$x = 4, \qquad y = -1, \qquad z = 3.$$

解之所以唯一，是因為 $\mathbf{M}$ 可逆（invertible）：$\det \mathbf{M} = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B} = (1 \cdot 1 \cdot (-2))(1) = -2 \neq 0$。

## 驗算

代回原式：$4 - 3 + 6 = 7$，$16 - 13 + 15 = 18$，$12 - 8 + 21 = 25$。三條方程全部成立。我們亦以精確分數驗證了 $\mathbf{AB} = \mathbf{M}$，以及 $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ 確實是 $\mathbf{M}^{-1}$；它最底一行是 $(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$。若採用試卷所印的 $e = 1$，乘積 $\mathbf{AB}$ 最底一行是 $(3, 10, 1)$，由此可確認那是印刷錯誤。

## 常見錯誤

- 相信試卷所印的 $e = 1$，然後硬要 $(3, 2)$ 和 $(3, 3)$ 兩個元素吻合。務必把你求得的 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 重新相乘核對。
- 用了 $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}$ 而不是 $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$。
- 只證明了這些值可行，卻沒有論證不可能有其他值。

## STEP 之外

這就是 *LU* 分解，也是電腦實際求解線性方程組（linear systems）的方法。高斯消去法（Gaussian elimination）其實就是作出分解 $\mathbf{M} = \mathbf{LU}$ 的過程。分解完成後，每換一個新的右方向量，只需做一次前向代入（forward substitution）和一次回代（back substitution），毋須重新消元。一般而言，可能要先作行交換（row swap），這樣得到的是 $\mathbf{PM} = \mathbf{LU}$。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra* 用了一整章圍繞這個想法展開。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。