詳細解答

STEP III 1993，第 2 題

純數學 • 拐點與極坐標面積

STEP III 1993，第 2 題

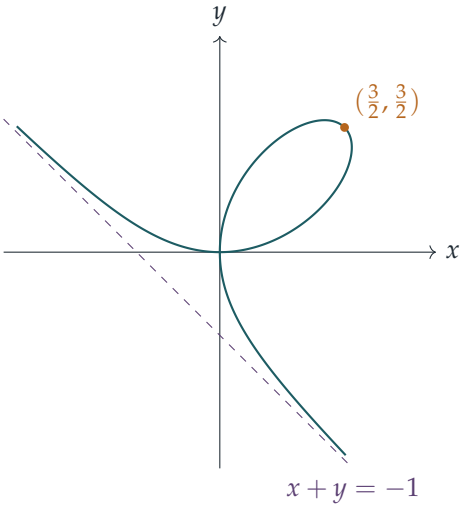
繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/93-s3-q2

關鍵思路

在拐點（point of inflection）處，二階導數必須為零（並且變號），所以 (i) 的計劃是用隱函數微分法（implicit differentiation）求出 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$，再看它何時可以為零。代數運算看似繁重，但曲線本身的方程會把分子化簡成非常簡潔的式子。至於 (ii)，三次項與 xy 項的次數不同，所以改用極坐標（polar coordinates）後可以約去因子 r^2，而 r 就成為 θ 的顯函數。

解答



草圖顯示了這條曲線（笛卡兒葉形線，folium of Descartes）：第一象限內有一個環圈，

第二和第四象限內各有一條分支趨近漸近線（asymptote）$x+y=-1$。

第 (i) 部分

把 $x^3+y^3=3xy$ 對 x 作隱函數微分，

$$3x^2+3y^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3y+3x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \qquad \text{所以} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{N}{D}, \quad N=y-x^2,\ D=y^2-x,$$

只要 $D\neq 0$ 即成立。對這個商求導，並利用 $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x}=y'-2x$ 和 $\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}x}=2yy'-1$，其中 $y'=N/D$，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}&=\frac{(y'-2x)D-N(2yy'-1)}{D^2}=\frac{(N-2xD)-(2yN^2/D-N)}{D^2}\\&=\frac{2(ND-xD^2-yN^2)}{D^3}.\end{aligned}$$

現在把括號展開：

$$\begin{aligned}ND&=x^3+y^3-x^2y^2-xy,\\xD^2&=xy^4-2x^2y^2+x^3,\\yN^2&=y^3-2x^2y^2+x^4y,\end{aligned}$$

所以

$$ND-xD^2-yN^2=3x^2y^2-xy-xy^4-x^4y=-xy\,(1+x^3+y^3-3xy).$$

在 C 上有 $x^3+y^3-3xy=0$，所以括號內的值就是 1，於是

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{-2xy}{(y^2-x)^3}.$$

想一想 這個式子在哪裏可能為零？公式失效的那些點又如何處理？

二階導數只有在 $x=0$ 或 $y=0$ 時才為零。在 C 上，$x=0$ 迫使 $y^3=0$，而 $y=0$ 迫使 $x^3=0$；無論哪種情況，我們都身處原點，而我們可以假設原點不是拐點。在原點和滿足 $y^2=x$ 的點以外，二階導數連續而且不為零，所以它不可能變號：這些地方沒有拐點。

餘下的是滿足 $D=y^2-x=0$ 的點，在這些點上 y 不是 x 的可微函數。假如 N 在那裏也是零，我們就有 $x=y^2$ 和 $y=x^2$，所以 $x=x^4$，得出 $(0,0)$ 或 $(1,1)$；但 $(1,1)$ 不在 C 上，因為 $1+1\neq 3$。因此在原點以外的每一個這樣的點上都有 $N\neq 0$：切線是鉛垂的，我們應該把 x 看成 y 的函數。C 的方程對 x 和 y 是對稱的，所以把上面運算中兩個字母的角色互換，便得

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=\frac{-2xy}{(x^2-y)^3},$$

這個式子有定義（因為 $x^2 - y = -N \neq 0$），而且不為零（因為在原點以外 $xy \neq 0$）。所以曲線在這些點上同樣不會改變彎曲的方向。

因此 C 沒有拐點。

第 (ii) 部分

設 $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$。那麼

$$r^3(\cos^3\theta + \sin^3\theta) = 3r^2\cos\theta\sin\theta,$$

而當 $r \neq 0$ 時，我們可以除以 r^2：

$$r = \frac{3\cos\theta\sin\theta}{\cos^3\theta + \sin^3\theta}.$$

當 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 時，分子和分母都非負（而且分母為正），所以 $r \geq 0$，並且恰好在 $\theta = 0$ 和 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 時 $r = 0$。因此當 θ 由 0 變到 $\frac{\pi}{2}$ 時，該點繞環圈走了一周，起點和終點都是原點。面積是

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} r^2\,\mathrm{d}\theta = \frac{9}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2\theta\sin^2\theta}{(\cos^3\theta + \sin^3\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta.$$

把分子和分母同時除以 $\cos^6\theta$（當 $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ 時為正），

$$A = \frac{9}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{\tan^2\theta\sec^2\theta}{(1 + \tan^3\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta.$$

代入 $u = \tan\theta$，$\mathrm{d}u = \sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$，其中 u 由 0 變到 ∞，

$$A = \frac{9}{2}\int_0^{\infty} \frac{u^2}{(1+u^3)^2}\,\mathrm{d}u = \frac{9}{2}\left[-\frac{1}{3(1+u^3)}\right]_0^{\infty} = \frac{9}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{3}{2}.$$

這個廣義積分（improper integral）收斂，因為當 $u \to \infty$ 時原函數（antiderivative）趨向 0。所以環圈的面積是 $\frac{3}{2}$。

驗算

- 環圈的頂端位於 $y = x$ 之處：由 $2x^3 = 3x^2$ 得 $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$，與原點的距離為 $\frac{3}{\sqrt{2}} \approx 2.12$。一個長度如此、闊度約為 1 的環圈，面積應該在 1 至 2 之間，與結果吻合。
- 利用參數式（parametrisation）$x = \frac{3t}{1+t^3}$，$y = \frac{3t^2}{1+t^3}$（直線 $y = tx$ 與 C 相交於該點），我們在隨機選取的點上比較了 $\frac{-2xy}{(y^2-x)^3}$ 與由參數式求得的二階導數，並檢查了曲率（curvature）在任何一條分支上都不變號。
- 對 $\frac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta$ 用中點法則作數值積分，以及沿參數化的環圈用鞋帶公式（shoelace formula）求和，兩者都得出 1.500000。

常見錯誤

- 把二階導數完全展開，卻始終沒有留意到 $x^3 + y^3 - 3xy$ 就藏在其中；這一步化簡正是全題的關鍵。
- 忘記了切線鉛垂的那些點，在那裏 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ 是沒有定義，而不是等於零。
- 計算面積時把 $\frac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta$ 誤寫成 $\frac{1}{2}\int r\,\mathrm{d}\theta$。

STEP 之外

隱函數微分法的依據是隱函數定理（implicit function theorem）：在任何滿足 $\partial F/\partial y \neq 0$ 的點附近，方程 $F(x,y)=0$ 確實把 y 定義為 x 的光滑函數。在原點，兩個偏導數（partial derivative）都為零，那是一個奇點（singular point），有兩條分支在該處相交，這就是它需要特別處理的原因。葉形線也是一條有理曲線（rational curve），可以用通過其二重點（double point）的直線 $y = tx$ 來參數化，這個想法通向代數幾何（algebraic geometry）。至於這一切背後的分析學，可參閱 Bartle 與 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（實分析入門）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。