詳細解答

STEP III 1993，第 15 題

概率與統計 • 等候時間的分佈

> **STEP III 1993，第 15 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/93-s3-q15

關鍵思路

把注意力放在最後一次投擲上。實驗恰好在第 n 次投擲停止，當且僅當這一次投擲補上了仍然欠缺的那一面的第二次出現，因此首 $n-1$ 次投擲必須恰好有一次是該面，其餘全部是另一面。這樣，分佈（distribution）就是兩個簡單項之和。期望值（expectation）於是化為兩個形如 $\sum n(n-1)x^{n-2}$ 的級數，而這類級數可由等比級數（geometric series）求導兩次得到。

解答

我們假設 $0 < p < 1$（否則實驗永遠不會結束），並假設各次投擲互相獨立（independent）。

N 的分佈

我們至少需要兩次正面和兩次反面，所以 $N \geq 4$。固定 $n \geq 4$。在事件 $N = n$ 上，第 n 次投擲不是正面就是反面，而這兩種情況互斥（disjoint）。

*第 n 次投擲是正面。*在此之前目標尚未達到，而第 n 次投擲添上一次正面後便達到目標。所以首 $n-1$ 次投擲已經包含至少兩次反面，但只有一次正面：恰好一次正面和 $n-2$ 次反面（而且 $n-2 \geq 2$，因為 $n \geq 4$）。反過來說，任何這樣的序列後面接上一次正面，都恰好在第 n 次停止。那唯一的一次正面可以出現在 $n-1$ 個位置中的任何一個，所以這種情況的概率是

$$(n-1)\,p\,q^{n-2} \cdot p = (n-1)p^2q^{n-2}.$$

*第 n 次投擲是反面。*把正面和反面對調，用同樣的論證可知概率是 $(n-1)q^2p^{n-2}$。

兩者相加，

$$\boxed{\mathrm{P}(N=n)=(n-1)(p^2q^{n-2}+q^2p^{n-2}),\qquad n=4,5,6,\ldots}$$

而當 $n\le 3$ 時 $\mathrm{P}(N=n)=0$。

想一想 當最後一次投擲是正面時，為甚麼首 $n-1$ 次投擲不可能包含兩次正面？

假如包含兩次正面，那麼它們已經有兩次正面和（停止條件所需的）兩次反面，實驗便會在第 n 次投擲之前結束。正是這一點把正面的次數確定為恰好一次。

期望值

對於 $|x|<1$，把 $\sum_{n\ge 0}x^n=(1-x)^{-1}$ 求導兩次，得

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}=\frac{2}{(1-x)^3}.$$

我們的和式由 $n=4$ 開始，所以要減去 $n=2$ 和 $n=3$ 的兩項，即 2 和 $6x$：

$$\sum_{n=4}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}=\frac{2}{(1-x)^3}-2-6x.$$

現在

$$\mathrm{E}(N)=\sum_{n=4}^{\infty}n\,\mathrm{P}(N=n)=p^2\sum_{n=4}^{\infty}n(n-1)q^{n-2}+q^2\sum_{n=4}^{\infty}n(n-1)p^{n-2}.$$

先取 $x=q$（於是 $1-x=p$），再取 $x=p$（於是 $1-x=q$）代入上述級數；由於 $0<p,q<1$，兩者皆成立：

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(N)&=p^2\Big(\frac{2}{p^3}-2-6q\Big)+q^2\Big(\frac{2}{q^3}-2-6p\Big)\\&=\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-2(p^2+q^2)-6pq(p+q).\end{aligned}$$

由於 $p+q=1$，我們有 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{p+q}{pq}=\frac{1}{pq}$ 以及 $p^2+q^2=(p+q)^2-2pq=1-2pq$。因此

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(N)&=\frac{2}{pq}-2(1-2pq)-6pq\\&=\frac{2}{pq}-2-2pq=2\Big(\frac{1}{pq}-1-pq\Big),\end{aligned}$$

這正是所要證明的結果。

驗算

- 各概率之和為 1：同一個級數少一個因子的版本給出 $\sum_{n\geq 4}(n-1)p^2q^{n-2} = 1-p^2-2p^2q$，加上對調後的版本，餘下 $1-(p^2+q^2)-2pq(p+q) = 1-1+2pq-2pq = 1$，當中用到 $p^2+q^2 = 1-2pq$。
- 對於公平的硬幣，$pq = \frac{1}{4}$，而 $\mathrm{E}(N) = 2(4-1-\frac{1}{4}) = \frac{11}{2}$。直接計算：$\mathrm{P}(N=4) = \frac{3}{8}$，$\mathrm{P}(N=5) = \frac{1}{4}$，...，而 $n\,\mathrm{P}(N=n)$ 的部分和趨近 5.5。
- 當 $p \to 0$ 時，$\mathrm{E}(N) \approx 2/p$：我們要等待兩次正面出現，每次大約需要 $1/p$ 次投擲。
- 列舉所有長度不超過 10 的序列，所得結果與這個分佈完全吻合；另外以 $p = 0.3$ 進行模擬，得出的平均值為 7.10，而公式給出的是 7.1038。

常見錯誤

- 把 $n-1$ 寫成 $\binom{n}{2}$：最後一次投擲的位置是固定的，所以只有首 $n-1$ 次投擲中那唯一的一次正面（或反面）可以自由選擇位置。
- 使用標準級數時，忘記減去 $n = 2$ 和 $n = 3$ 的兩項。

STEP 之外

N 是兩個經平移的負二項（negative binomial）等待時間的混合，而對等比級數求導這個技巧，其實是概率生成函數（probability generating function）的手工版本。設 $G(s) = \mathrm{E}(s^N)$，便可同樣快捷地由 $G'(1)$ 得到平均值，並由 $G''(1)$ 得到方差（variance）。Grimmett 與 Welsh 所著的 *Probability: An Introduction*（概率論入門）詳細講述生成函數，以及像本題這類的等待時間問題。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。