詳細解答

STEP III 1993，第 14 題

力學 • 鉛垂圓周運動

STEP III 1993，第 14 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

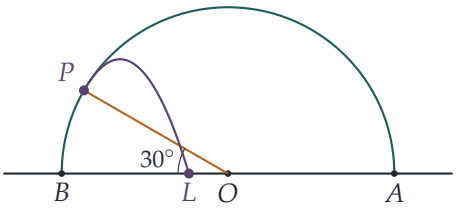
step.maths.org/questions/93-s3-q14

關鍵思路

由於繩子水平，而質點（particle）沿鉛垂方向拋出，初速度與繩子垂直，所以質點會在以 O 為圓心、半徑為 c 的鉛垂圓上運動，並落在與 A 位於同一直徑另一端的點 B。每次碰撞時速度都是鉛垂的，所以碰撞只是把速率減半。我們要找出質點在第幾次反彈後首次無法越過圓的頂點，然後利用能量和徑向方程（radial equation）求出張力（tension）變為零的位置。此後質點便是普通的拋體（projectile）。

解答

我們把質點看成質量為 m 的質點，繩子為輕而不可伸長（light and inextensible），桌面為光滑（smooth）且水平。取 O 為原點，並設 $A = (c, 0)$ 及 $B = (-c, 0)$。無論質點在哪一側上升，設它位於該側水平半徑之上、夾角為 θ 的位置。



兩次碰撞之間的運動

假設質點在 A 或 B 離開桌面，以速率 V 鉛垂向上運動。它的速度與拉緊的繩子垂直，所以只要繩子保持拉緊，它便在以 O 為圓心、半徑為 c 的圓上運動。根據能量守恆（con-

servation of energy)，在角度 θ 時，它的速率 v 滿足

$$v^2 = V^2 - 2gc\sin\theta.$$

沿指向 O 的方向分解，設張力為 T，

$$T + mg\sin\theta = \frac{mv^2}{c} \quad\Longrightarrow\quad \frac{T}{m} = \frac{V^2}{c} - 3g\sin\theta.$$

當 $0 \le \theta \le 90^\circ$ 時，張力在頂點最小，所以繩子在整個半圓上保持拉緊，當且僅當 $V^2 \ge 3gc$。（過了頂點之後，$\sin\theta$ 再次減小，所以 T 只會增大。）在這情況下，質點會落到直徑另一端的桌面上，而根據能量守恆，它此時鉛垂向下運動，速率同樣是 V。

在該次碰撞中，速度與桌面垂直，所以反彈方向是鉛垂的，速率為 $\frac{1}{2}V$，而繩子仍然水平並且拉緊。因此整個過程會重複一次，只是 V 減半。

繩子在哪裏變鬆

質點起初的速率為 $V_0 = 64\sqrt{6gc}$，所以 $V_0^2 = 24576\,gc$。經過 k 次碰撞後，速率為 $V_k = V_0/2^k$，所以

$$V_k^2 = \frac{24576}{4^k}\,gc: \qquad V_6^2 = 6gc, \qquad V_7^2 = \tfrac{3}{2}gc.$$

因此，以速率 $V_0, \dots, V_6$ 開始的各個半圓全部都能走完（每個都有 $V_k^2 \ge 3gc$），碰撞依次發生在 B, A, B, A, B, A, B。第七次碰撞在 B，而質點從 B 上升時 $V_7^2 = \frac{3}{2}gc < 3gc$。

> **想一想** 質點會不會在繩子變鬆之前就已經往回落，而不是繩子先變鬆？

不會。速率會在 $V_7^2 = 2gc\sin\theta$ 處變為零，即 $\sin\theta = \frac{3}{4}$，但張力更早便變為零，位置滿足

$$\frac{V_7^2}{c} = 3g\sin\theta \quad\Longrightarrow\quad \tfrac{3}{2}gc = 3gc\sin\theta \quad\Longrightarrow\quad \sin\theta = \tfrac{1}{2}.$$

所以繩子在 $\theta = 30^\circ$ 時變鬆，位置是 B 那一側的點 P，離桌面的高度為 $c\sin\theta = c/2$，正如題目所求。

A 與 B 之間的第一次反彈

在 P 點有 $\theta = 30^\circ$，所以 $P = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}c,\ \frac{1}{2}c\right)$，並且

$$v^2 = \tfrac{3}{2}gc - 2gc\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}gc.$$

速度沿切線方向，與 OP 垂直，指向上方並朝向 O 的一邊；它與水平方向成 60° 角。所以它的分量為

$$v_x = \tfrac{1}{2}v, \qquad v_y = \tfrac{\sqrt{3}}{2}v, \qquad \text{其中} v_x^2 = \tfrac{1}{8}gc, \quad v_y^2 = \tfrac{3}{8}gc.$$

從這時起，質點就是一個拋體。當 $\frac{1}{2}c + v_y t - \frac{1}{2}gt^2 = 0$ 時它到達桌面；取正根，

$$t = \frac{v_y + \sqrt{v_y^2 + gc}}{g} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{11}}{\sqrt{8}}\sqrt{\frac{c}{g}}.$$

在這段時間內，它的水平位移為

$$v_x t = \sqrt{\frac{gc}{8}} \cdot \frac{\sqrt{3}+\sqrt{11}}{\sqrt{8}}\sqrt{\frac{c}{g}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{11}}{8}\,c,$$

所以它落在點 L，其中

$$x_L = -\frac{\sqrt{3}}{2}c + \frac{\sqrt{3}+\sqrt{11}}{8}c = \frac{\sqrt{11}-3\sqrt{3}}{8}\,c \approx -0.235\,c.$$

（在整段飛行過程中，質點與 O 的距離始終不超過 c，所以繩子在到達 L 之前不會再次拉緊；特別地，$|x_L| < c$。）

由於 $\sqrt{11} < \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$，我們有 $x_L < 0$：落點與 B 位於 O 的同一側。因為 O 是 AB 的中點，所以 A 與 B 之間的第一次反彈**較接近** B，與 B 相距約 $0.77c$，與 A 相距約 $1.23c$。

驗算

- 以 $V_k^2 \geq 3gc$ 作檢驗，可知 $k = 7$ 是第一個走不完的半圓，而 $V_7^2 = \frac{3}{2}gc$；繩子變鬆的條件給出 $\sin\theta = \frac{1}{2}$。
- 在 P 點，重力的徑向分量 $g\sin 30^\circ = \frac{1}{2}g$ 等於 $v^2/c = \frac{1}{2}g$，正好符合張力為零的要求。
- 逐步進行的數值模擬（取 $g = 9.8$，$c = 1.3$）顯示，繩子在高度 $0.5000c$ 處變鬆，落點在 $x \approx -0.2349c$，而飛行期間質點與 O 的距離從未超過 c。

常見錯誤

- 以 $V^2 \geq 4gc$（剛好到達頂點）作為走完半圓的條件。繩子與桿不同，需要 $V^2 \geq 3gc$。
- 弄不清第七次碰撞發生在哪一端：第奇數次碰撞都在 B。
- 把 P 點速度的方向弄錯：它與 OP 垂直，與水平方向成 60° 角，而不是 30°。

STEP 之外

繩子變鬆的一刻，就是一個約束（constraint）停止作用的一刻：張力正是用來維持 $|OP| = c$ 的拉格朗日乘數（Lagrange multiplier），當它必須變為負數才能維持約束

時，這個約束便不再起作用。像這樣帶有單邊約束（one-sided constraint）以及碰撞的問題，在大學本科的力學課程中會有系統地處理。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）是個好去處，可以看到能量與徑向方程怎樣這樣配合使用。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。