詳細解答

STEP III 1993，第 13 題

力學 • 變質量鏈條

STEP III 1993，第 13 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/93-s3-q13

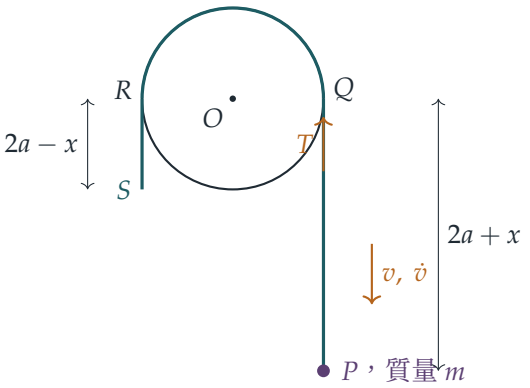
關鍵思路

由於鏈條不能滑動，圓盤、整條鏈條和質點都以相同的速率運動：未知量只有一個，就是 v。於是動能（kinetic energy）為 $\frac{1}{2}$(等效質量)v^2。在勢能（potential energy）方面，只有兩段懸垂部分會改變，因為繞過頂部的那段弧只是不斷被完全相同的鏈條取代。至於張力（tension），可考慮運動中的 PQ 段連同質點。然後仔細想想：在 Q 處加入這一段的鏈條，本身已經以多快的速率運動。

解答

模型

圓盤是均勻薄片（uniform lamina），繞通過 O 的光滑固定軸轉動，其轉動慣量（moment of inertia）為 $\frac{1}{2}(4m)a^2 = 2ma^2$。鏈條是均勻的，每單位長度的質量為 m/a，不可伸長，並且不會在盤邊上滑動。質點視為點質量。當 P 下降了 x 時，右邊的一段 QP 長度為 $2a + x$，左邊的一段 RS 長度為 $2a - x$，而弧 RQ 是長度為 πa 的半圓。鏈條上每一點都以速率 v 運動，由於沒有滑動，盤邊亦然，所以圓盤的角速率（angular speed）為 $\omega = v/a$。



速率

動能。圓盤的貢獻為 $\frac{1}{2}(2ma^2)(v/a)^2 = mv^2$，鏈條為 $\frac{1}{2}(4+\pi)mv^2$，質點為 $\frac{1}{2}mv^2$。所以

$$\text{動能} = \tfrac{1}{2}mv^2(2+4+\pi+1) = \tfrac{1}{2}(\pi+7)mv^2.$$

勢能。弧 RQ 始終是同樣的一段半圓形鏈條，所以它的勢能永不改變。取 O 的水平為零勢能面。一段長度為 ℓ、懸垂在該水平之下的鏈條，質量為 $m\ell/a$，其質心（centre of mass）位於深度 $\frac{1}{2}\ell$ 處，所以它的勢能為 $-\dfrac{mg\ell^2}{2a}$。因此，兩段懸垂部分的勢能損失為

$$\frac{mg}{2a}\left[(2a+x)^2+(2a-x)^2-(2a)^2-(2a)^2\right] = \frac{mg}{2a}\cdot 2x^2 = \frac{mgx^2}{a}.$$

質點則損失 mgx。

能量。軸是光滑的，而粗糙接觸面不作功，因為沒有滑動。所以能量守恆，而由靜止開始，

$$\tfrac{1}{2}(\pi+7)mv^2 = \frac{mgx^2}{a} + mgx \quad\Longrightarrow\quad (\pi+7)av^2 = 2g(x^2+ax),$$

正如所求。

加速度

對時間求導，並利用 $\dot{x} = v$：

$$2(\pi+7)av\dot{v} = 2g(2x+a)v \quad\Longrightarrow\quad \dot{v} = \frac{g(2x+a)}{(\pi+7)a} \qquad (v \neq 0).$$

當 $x = 2a$ 時，S 到達 R，這時

$$\dot{v} = \frac{5g}{\pi+7}, \qquad v^2 = \frac{2g(4a^2+2a^2)}{(\pi+7)a} = \frac{12ga}{\pi+7}.$$

Q 處的張力

設 T 為 Q 處的張力。我們選取的系統是質點連同懸垂在 Q 之下的鏈條。它的質量為

$$M = \frac{m}{a}(2a + x) + m,$$

隨着鏈條離開圓盤，這個質量以 $\dot{M} = \dfrac{m}{a}v$ 的速率增加。作用於它的外力是向下的重量 Mg 和向上的 T。整個系統都以速率 v 向下運動。

想一想 正要加入 PQ 的鏈條，在加入前的一刻運動得有多快？

在 Q 處，盤邊是豎直的，所以到達該處的鏈條本身已經以速率 v 豎直向下運動。它把自己的動量（momentum）$v\,\delta M$ 一併帶來。於是變質量方程（variable-mass equation）（動量的變化率 = 力 + 每單位時間帶入的動量）為

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Mv) = Mg - T + v\dot{M}, \qquad \text{即} \qquad M\dot{v} = Mg - T.$$

當 S 到達 R 時，$M = 5m$，所以

$$T = 5m\left(g - \frac{5g}{\pi + 7}\right) = \frac{5(\pi + 2)}{\pi + 7}\,mg.$$

*用力矩覆核。*把圓盤和鏈條的弧 RQ 一併考慮。軸的作用力通過 O，弧的重量對 O 的總力矩（moment）為零（弧對通過 O 的豎直線對稱），而鏈條與圓盤之間的摩擦力是內力。弧上每一個質點都在距離 O 為 a 之處以速率 v 運動。所以角動量（angular momentum）為 $(2ma^2 + \pi ma^2)(v/a)$，而

$$(T - T_R)a = (2 + \pi)ma\,\dot{v}.$$

當 S 到達 R 時，左邊的一段已縮短至零，所以 $T_R = 0$。由此再次得出 $T = (2 + \pi)m \cdot \dfrac{5g}{\pi + 7} = \dfrac{5(\pi + 2)}{\pi + 7}mg$。

*試卷印出的答案。*試卷給出的值 $\dfrac{5\pi - 2}{\pi + 7}mg$，正是寫成 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Mv) = Mg - T$ 時所得的結果，這樣寫等於把加入 PQ 的鏈條當作是靜止地到達：

$$T = M(g - \dot{v}) - \frac{m}{a}v^2 = \frac{5(\pi + 2)}{\pi + 7}mg - \frac{12}{\pi + 7}mg = \frac{5\pi - 2}{\pi + 7}mg.$$

對於一顆雨點沿途吸收靜止的霧氣，這條方程是對的。但在這裏並不正確，因為繞過盤邊而來的鏈條本身已經隨 PQ 一起運動。我們的兩種方法都得出 $\dfrac{5(\pi + 2)}{\pi + 7}mg$，所以我們相信印出的答案包含了這個錯誤。如果你需要得出印出的數值，可使用「靜止地加入」的方程，但要知道它把 T 少算了 mv^2/a。

驗算

- 在 $x = 0$ 時，公式給出 $v = 0$ 和 $\dot{v} = g/(\pi + 7)$。不平衡的力只有質點的重量 mg，作用於等效質量 $(\pi + 7)m$ 之上。
- 由靜止開始，以數值方法逐步求解運動方程 $(\pi + 7)m\dot{v} = mg(2x + a)/a$，可重現 $(\pi + 7)av^2 = 2g(x^2 + ax)$，誤差在 10^{-11} 之內。取 $m = a = 1$ 和 $g = 9.81$，動量法和力矩法都給出 $T/mg \approx 2.5349 = 5(\pi + 2)/(\pi + 7)$。「靜止地加入」的版本則給出 $1.3517 = (5\pi - 2)/(\pi + 7)$。
- $T < 5mg$，這是必然的，因為懸垂的質量 $5m$ 正在向下加速。

常見錯誤

- 忘記計算圓盤的動能，或者在計算其轉動慣量時用了 ma^2 而不是 $\frac{1}{2}(4m)a^2$。
- 把鏈條的弧計入勢能的變化之中。它的形狀和位置從不改變。
- 使用 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Mv) = F$ 時，沒有問清楚加入的質量本身已有甚麼速度。

STEP 之外

變質量問題的真正重點，在於選定一個系統，並追蹤越過其邊界的動量。這就是控制體積（control volume）的概念，它是火箭運動和大部分流體力學（fluid mechanics）的基礎。這裏的常見錯誤，即假設 $F = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mv)$ 對任何變化中的質量都成立，是一個著名的陷阱：一般而言，這條方程甚至會隨參考系（frame of reference）而改變。Kleppner 與 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）對變質量系統有嚴謹的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。