詳細解答

STEP III 1993，第 12 題

力學 • 彈性繩與能量

STEP III 1993，第 12 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

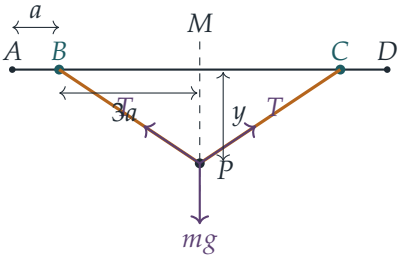
step.maths.org/questions/93-s3-q12

關鍵思路

由於釘子是光滑（smooth）的，而質點位於弦線的中點，弦線便分成兩段完全相同的半段，每段的自然長度（natural length）均為 a，而且每一半段上各處的張力（tension）相同。每一半段都由一個固定端出發，繞過一枚釘子，再向下（或向上）連到 P，所以它拉伸後的長度只取決於距離 BP。只要把伸長量（extension）用 P 的高度表示出來，平衡（equilibrium）條件便給出 k，而能量守恆（conservation of energy）則把 Q 與 R 聯繫起來。

解答

我們把 P 看作質點（particle），把弦線看作輕而有彈性（light and elastic），並把釘子看作光滑。根據對稱性，P 沿着通過 BC 中點 M 的鉛垂線運動。設 y 為 P 在 M 之下的深度；當 P 在 BC 之上時，它是負數。



求 k

半段 $A \to B \to P$ 的長度為 $a + BP = a + \sqrt{9a^2 + y^2}$，自然長度為 a，所以它的伸長量是

$$x = \sqrt{9a^2 + y^2}.$$

根據胡克定律（Hooke's law），每一半段的張力為

$$T = \frac{kmg\,x}{a}.$$

若 θ 是 BP 與水平線所成的角，則 $\sin\theta = |y|/x$。在 P 點沿鉛垂方向分解力，得

$$2T\sin\theta = mg \quad\Longrightarrow\quad 2\cdot\frac{kmg\,x}{a}\cdot\frac{y}{x} = mg \quad\Longrightarrow\quad \frac{2ky}{a} = 1.$$

平方根已經約去，所以那個難看的數值 $BP = \frac{\sqrt{145}}{4}a$ 根本用不着。代入 $y = a/4$，得 $k/2 = 1$，所以

$$k = 2.$$

由 Q 到 R 的能量

每一半段儲存的彈性勢能（elastic energy）為 $\dfrac{kmg\,x^2}{2a}$，所以當 $k = 2$ 時，兩個半段合共儲存

$$E(y) = 2\cdot\frac{2mg\,x^2}{2a} = \frac{2mg\,(9a^2 + y^2)}{a}.$$

? **想一想** 為甚麼 P 會在 R 停下來？P 最後升到釘子之上，為甚麼沒有問題？

P 在 Q 由靜止釋放，而 R 是它升到的最高點，所以它在那裏同樣是瞬時靜止的。在 BC 之上，兩個半段仍然處於拉伸狀態（每段仍有 $x \geq 3a > 0$），所以 E 的公式同樣適用。弦線始終不會鬆弛。

在 Q，$y = pa$；在 R，$y = -3a$。質點上升了 $(p+3)a$。由於釘子光滑，又沒有其他能量損失，而動能（kinetic energy）在兩端均為零，所以

$$\begin{aligned} E(pa) &= E(-3a) + mg(p+3)a \\ 2mga(9+p^2) &= 2mga(9+9) + mga(p+3) \\ 18 + 2p^2 &= 36 + p + 3, \end{aligned}$$

由此得

$$2p^2 - p - 21 = 0, \qquad \text{即} \qquad (2p+6)(p-\tfrac{7}{2}) = 0.$$

由於 $p > 0$，我們得到 $p = \frac{7}{2}$。

這與題目印出的 $2p^2 - p - 17 = 0$ 並不吻合。我們已仔細核對過這個模型（見「驗算」），包括直接進行數值模擬，而按題目所給的數據，得出的確實是 -21。$p = \frac{7}{2}$ 這個整齊的根顯示，21 才是原意中的常數，17 應是誤印。最後一部分並不取決於哪一個常數才正確。

要確認 P 的確是在 R 第一次停下來，可設 $y = ta$。在深度 ta 處的動能為

$$E(pa) - E(ta) - mg(p-t)a = mga\,(p-t)(2p+2t-1).$$

當 $p = \frac{7}{2}$ 時，這就是 $mga\,(\frac{7}{2} - t)(2t+6)$。它在 $-3 < t < \frac{7}{2}$ 時為正，並在 $t = -3$ 時首次變為零，而這正是 R。

比較張力

張力為 $T = 2mg\,x/a$，它隨 x 增加而增加，所以我們需要證明 x 在 R 的值比在 Q 的值小。能量方程毋須用到 p 的值便可做到這一點：

$$E(Q) - E(R) = mg(p+3)a > 0.$$

彈性勢能為 $\dfrac{2mg\,x^2}{a}$，所以 $x_R^2 < x_Q^2$，從而 $x_R < x_Q$，因此 $T_R < T_Q$。用文字來說，質點在上升途中獲得了勢能（potential energy），而這些能量只能來自弦線，所以弦線在 R 的拉伸程度必定較小。

具體而言，當 $p = \frac{7}{2}$ 時，$x_Q = \frac{\sqrt{85}}{2}a$ 而 $x_R = 3\sqrt{2}\,a$，所以

$$T_Q = \sqrt{85}\,mg \approx 9.22\,mg, \qquad T_R = 6\sqrt{2}\,mg \approx 8.49\,mg.$$

驗算

- 簡諧運動驗算。作用於 P 的向上的力為 $2T \cdot \dfrac{y}{x} = \dfrac{4mg\,y}{a}$，它是 y 的線性函數，在 BC 之上和之下都是如此。所以 P 圍繞 $y = a/4$（即上面求得的平衡位置）作簡諧運動（simple harmonic motion）。它在 $y = \frac{7}{2}a$ 由靜止釋放，振幅（amplitude）為 $\frac{13}{4}a$，所以它的最高點是 $y = \frac{1}{4}a - \frac{13}{4}a = -3a$。這正好就是 R，從而獨立地確認了 $p = \frac{7}{2}$。
- 取 $a = 1$、$k = 2$、$p = 3.5$，對運動方程作數值積分，所得的最高點為 $y = -3.0000$。
- 題目印出的方程會給出 $p = \frac{1+\sqrt{137}}{4} \approx 3.18$，而這樣能量收支便會相差 $4mga$。

常見錯誤

- 計算每一半段的長度時漏掉了 AB 這一段。半段的長度是 $AB + BP = a + BP$，而它的伸長量之所以是 BP，只是因為 AB 剛好等於它的自然長度 a。

- 把整條弦線當作一條彈簧，張力為 $kmg \cdot (\text{總伸長量})/(2a)$。這樣做的確會得到相同的答案，但前提是伸長量必須取總伸長量 $2x$。
- 忘記了當 P 在 BC 之上時，彈性勢能仍然存在。弦線在那裏仍然處於拉伸狀態。

STEP 之外

儘管弦線的幾何關係是非線性的，鉛垂方向的回復力（restoring force）卻恰好與位移成正比。這是因為，若張力與長度成正比，它的鉛垂分量便與鉛垂方向的距離成正比；自然長度為零的彈簧能成為理想的懸掛裝置，也是出於同一個原因（這正是 LaCoste 長周期地震儀背後的原理）。勢能若是坐標的二次函數，便會導出線性的運動方程，而這正是小振動（small oscillations）與簡正模式（normal modes）理論的起點。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）正是以這種精神處理彈簧、能量和振動的。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。