詳細解答

STEP III 1993，第 11 題

力學 • 力偶與轉動慣量

STEP III 1993，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/93-s3-q11

關鍵思路

在立方體上建立坐標，並把每個力寫成向量（vector）。六個力之和為零，所以它們的作用只是施加一個力偶（couple），而力偶對任何一點的力矩（moment）都相同。第 (i) 部分討論的就是這個力矩的方向。第 (ii) 部分只用到它沿 OO' 的分量，再配合轉動慣量（moment of inertia）；我們會利用點到直線的距離，逐根桿把轉動慣量計算出來。

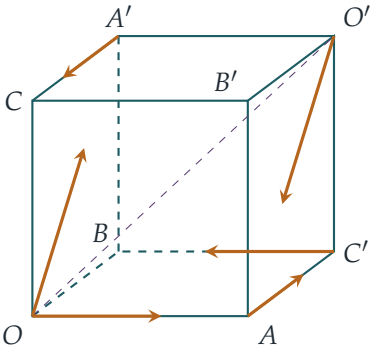
解答

我們把框架視為剛體（rigid body），由均勻細桿組成，並且不考慮重力。取 O 為原點，單位向量分別沿 OA、OB、OC，於是

$$A = (a,0,0), \quad B = (0,a,0), \quad C = (0,0,a),$$

而相對的頂點為

$$O' = (a,a,a), \quad A' = (0,a,a), \quad B' = (a,0,a), \quad C' = (a,a,0).$$



琥珀色箭頭顯示六條作用線，對角線 OO' 則以紫紅色虛線表示。

第 (i) 部分

每個力等於它的大小乘以沿其作用線的單位向量。例如，$O'A$ 是向量 $(0,-a,-a)$，長度為 $\sqrt{2}\,a$，所以沿它作用的力 $\sqrt{2}\,mg$ 就是 $mg(0,-1,-1)$。對全部六個力作同樣處理：

作用線	線上一點	力
OA	O	$mg(2,0,0)$
AC'	A	$mg(0,1,0)$
$O'A$	A	$mg(0,-1,-1)$
OA'	O	$mg(0,1,1)$
$C'B$	B	$mg(-2,0,0)$
$A'C$	C	$mg(0,-1,0)$

這些力之和為 $\mathbf{0}$。合力（resultant）為零的力系等價於一個力偶，而力偶對任何一點的力矩都相同。對 O 取力矩（沿 OA 和 OA' 的力通過 O，沒有貢獻）：

$$\begin{aligned}\mathbf{G} &= A\times mg(0,1,0) + A\times mg(0,-1,-1) + B\times mg(-2,0,0) + C\times mg(0,-1,0)\\ &= amg[(0,0,1)+(0,1,-1)+(0,0,2)+(1,0,0)]\\ &= amg\,(1,1,2).\end{aligned}$$

位於 O 的支點可以對框架施力，但這個力通過 O，所以對 O 沒有力矩。因此，框架由靜止開始，會繞着通過 O 並沿力偶軸線的直線轉動，其方向為

$$\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},$$

正如題目所求。

*給好奇讀者的補充。*這是題目預期的答案，也是你應該寫下的答案。不過嚴格來說，對一個可在三維空間自由轉動的物體，角加速度（angular acceleration）是 $\mathbf{I}^{-1}\mathbf{G}$，其中 $\mathbf{I}$ 是對 O 的慣量張量（inertia tensor）。只有當 $\mathbf{G}$ 沿着主軸（principal axis）時，角加速度才會指向 $\mathbf{G}$ 的方向。就這個框架而言，對 O 來說，繞 OO' 的轉動慣量是 $14ma^2/3$（見第 (ii) 部分），而繞每一條通過 O 並垂直於 OO' 的軸的轉動慣量都是 $41ma^2/3$。由此得出初始轉軸的方向為 $(25,25,32)$，與 $(1,1,2)$ 相差約 12.6°。

第 (ii) 部分

設 $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ 為沿 OO' 的單位向量。由於 $\mathbf{p}\cdot\mathbf{u}$ 是 $\mathbf{p}$ 沿該直線的分量，根據畢氏定理（Pythagoras' theorem），點 $\mathbf{p}$ 與直線 OO' 的距離的平方為

$$d^2 = |\mathbf{p}|^2 - (\mathbf{p}\cdot\mathbf{u})^2$$

。

桿 OA。與 O 相距 x 的點是 $(x,0,0)$，所以 $d^2 = x^2 - \frac{x^2}{3} = \frac{2}{3}x^2$。長度為 $\mathrm{d}x$ 的小段，質量為 $\frac{m}{a}\,\mathrm{d}x$，所以

$$I_{OA} = \int_0^a \frac{m}{a}\cdot\frac{2x^2}{3}\,\mathrm{d}x = \frac{2ma^2}{9}.$$

中點 $(\frac{a}{2},0,0)$ 與 OO' 的距離的平方為 $\frac{2}{3}\cdot\frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{6}$。根據平行軸定理（parallel axis theorem），繞通過中點的平行軸，

$$I_{\text{中點}} = \frac{2ma^2}{9} - m\cdot\frac{a^2}{6} = \frac{ma^2}{18}.$$

桿 $B'C$。這根桿由 $(a,0,a)$ 伸延至 $(0,0,a)$，所以與 OA 平行。它的長度也相同，與轉軸所成的角度亦相同。因此，繞通過它自身中點的平行軸，它的轉動慣量同樣是 $ma^2/18$。它的中點為 $\mathbf{p} = (\frac{a}{2},0,a)$，而

$$d^2 = \frac{a^2}{4} + a^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{3a}{2}\right)^2 = \frac{5a^2}{4} - \frac{3a^2}{4} = \frac{a^2}{2}.$$

根據平行軸定理，

$$I_{B'C} = \frac{ma^2}{18} + \frac{ma^2}{2} = \frac{5ma^2}{9}.$$

想一想 我真的要對全部十二根桿逐一這樣計算嗎？

不用：對稱性（symmetry）會替我們完成。繞 OO' 旋轉 120°（即輪換 $x\to y\to z\to x$），以及對立方體中心的點反射 $\mathbf{p}\mapsto(a,a,a)-\mathbf{p}$，兩者都把框架和直線 OO' 映射到自身。所以它們不會改變任何繞 OO' 的轉動慣量。旋轉把 OA 帶到 OB 和 OC，而反射再把這三根桿帶到 $O'A'$、$O'B'$ 和 $O'C'$。這就是一端位於 O 或 O' 的六根桿，每根的轉動慣量都是 $2ma^2/9$。同樣地，$B'C$ 會被帶到環繞立方體中部的「之字形」AB'、$B'C$、CA'、$A'B$、BC'、$C'A$ 中的其餘五根桿，而這些桿每根的轉動慣量都是 $5ma^2/9$。因此

$$I_{\text{框架}} = 6\cdot\frac{2ma^2}{9} + 6\cdot\frac{5ma^2}{9} = \frac{42ma^2}{9} = \frac{14ma^2}{3},$$

正如題目所求。

角加速度。現在框架只能繞固定直線 OO' 轉動。軸承會提供垂直於該直線所需的任何力偶，所以只有外加力偶沿 OO' 的分量會令框架轉動。這些力仍然構成力偶

$\mathbf{G} = amg(1,1,2)$，而它對任何直線的力矩，就是它沿該直線的分量：

$$\mathbf{G}\cdot\mathbf{u} = \frac{amg(1+1+2)}{\sqrt{3}} = \frac{4amg}{\sqrt{3}}.$$

由繞固定軸轉動的方程 $I\ddot{\theta} = \mathbf{G}\cdot\mathbf{u}$ 可得

$$\ddot{\theta} = \frac{4amg/\sqrt{3}}{14ma^2/3} = \frac{12g}{14\sqrt{3}\,a} = \frac{2\sqrt{3}\,g}{7a}.$$

由 O' 望向 O 時，它的轉向是逆時針的，也就是繞方向 $\overrightarrow{OO'}$ 的右手旋轉。

驗算

- 六個力各有一個「拍檔」：OA 配 $C'B$，AC' 配 $A'C$，$O'A$ 配 OA'。每一對都是大小相等、方向相反，並且作用線平行，所以合力為零。
- 框架對其中心具有立方對稱性，所以繞每一條通過中心的軸，轉動慣量都相同。繞通過中心並平行於 OC 的軸，四根垂直的桿貢獻 $4m(a/\sqrt{2})^2 = 2ma^2$。八根水平的桿每根貢獻 $\frac{ma^2}{12} + \frac{ma^2}{4} = \frac{ma^2}{3}$。總和是 $\frac{14ma^2}{3}$，與上面的答案吻合，因為 OO' 同樣通過中心。
- 數值上，取 $a = m = g = 1$，對十二根桿以中點法求和，得出 $I = 4.66667$ 及 $\ddot{\theta} = 0.494872$，與 $2\sqrt{3}/7 \approx 0.494872$ 相符。

常見錯誤

- 把沿面對角線的力 $\sqrt{2}\,mg$ 化為分量時，忘記了因子 $1/\sqrt{2}$：每個力的分量大小是 mg，而不是 $\sqrt{2}\,mg$。
- 在第 (ii) 部分使用了整個力偶 $|\mathbf{G}| = \sqrt{6}\,amg$，而不是它沿固定軸的分量。
- 從一條不通過質心（centre of mass）的軸出發應用平行軸定理：這個定理必須經由質心，就像由 $2ma^2/9$ 到 $ma^2/18$ 的那一步。

STEP 之外

對於三維空間中的轉動，轉動慣量會變成一個 3×3 的對稱矩陣（symmetric matrix），即慣量張量，而角動量（angular momentum）為 $\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}$。它的特徵向量（eigenvector）就是主軸。正如第 (i) 部分的補充所示，物體一般不會繞着外加力偶的軸線開始轉動。這個立方體框架是個很好的例子：繞每一條通過其中心的軸，它的轉動慣量都相同，但對

一個角來說卻並非如此。Kleppner 與 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）闡述了三維空間中的剛體運動，包括慣量張量。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。