詳細解答

STEP III 1993，第 10 題

純數學 • 矩陣變換

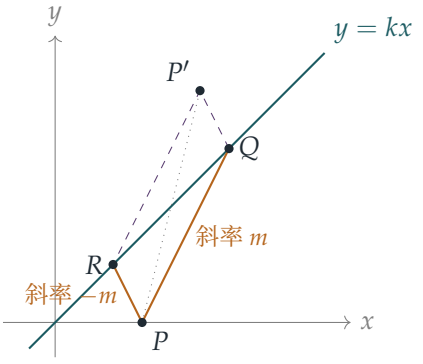
> **STEP III 1993，第 10 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/93-s3-q10

關鍵思路

這裏每一步都是求兩條直線的交點，所以各點的坐標只需每次解一條一次方程便可得到。平行四邊形（parallelogram）則讓我們不必再多做計算就得到 P'：在平行四邊形 $PQP'R$ 中，兩條對角線（diagonal）互相平分，所以以位置向量（position vector）表示時有 $P + P' = Q + R$。只要把 P' 寫成一個矩陣（matrix）乘以 P，面積的問題就只是計算一個行列式（determinant）。

解答

全題都需要 $m^2 \neq k^2$：若 $m = \pm k$，則通過 P 的兩條直線之中，有一條與 $y = kx$ 平行，永不與它相交（或者與它重合），這個作圖便不成立。



（圖中取 $m = 2$，$k = 1$ 及 $P = (1, 0)$。）

點 Q

通過 $P(x_1, y_1)$ 且平行於 $y = mx$ 的直線是 $y - y_1 = m(x - x_1)$。在 Q 點同時有 $y = kx$，所以

$$kx - y_1 = mx - mx_1 \quad \Longrightarrow \quad (m-k)x = mx_1 - y_1 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{mx_1 - y_1}{m-k},$$

其中除以了 $m - k \neq 0$。再由 $y = kx$ 得

$$Q = \left(\frac{mx_1 - y_1}{m-k}, \frac{k(mx_1 - y_1)}{m-k} \right),$$

這正是所求。

點 R

通過 P 且平行於 $y = -mx$ 的直線，計算方法完全相同，只需把 m 換成 $-m$：

$$x = \frac{-mx_1 - y_1}{-m-k} = \frac{mx_1 + y_1}{m+k}, \qquad R = \left(\frac{mx_1 + y_1}{m+k}, \frac{k(mx_1 + y_1)}{m+k} \right).$$

點 P'

想一想 怎樣可以不再求任何直線的交點，就找到平行四邊形的第四個頂點？

各頂點依次為 P, Q, P', R，所以 PP' 和 QR 是對角線。平行四邊形的對角線互相平分，因此兩者的中點相同：

$$\tfrac{1}{2}(P + P') = \tfrac{1}{2}(Q + R) \quad \Longrightarrow \quad P' = Q + R - P.$$

（等價地，$\overrightarrow{QP'} = \overrightarrow{PR}$。）$Q$ 和 R 都在 $y = kx$ 上，所以最簡單的做法是先把它們的 x 坐標相加。以 $m^2 - k^2$ 為公分母，

$$\begin{aligned} x_Q + x_R &= \frac{(mx_1 - y_1)(m+k) + (mx_1 + y_1)(m-k)}{m^2 - k^2} \\ &= \frac{(m^2x_1 + mkx_1 - my_1 - ky_1) + (m^2x_1 - mkx_1 + my_1 - ky_1)}{m^2 - k^2} \\ &= \frac{2(m^2x_1 - ky_1)}{m^2 - k^2}, \end{aligned}$$

並且 $y_Q + y_R = k(x_Q + x_R)$。因此，設 $P' = (x', y')$，則

$$x' = \frac{2(m^2x_1 - ky_1)}{m^2 - k^2} - x_1 = \frac{(m^2 + k^2)x_1 - 2ky_1}{m^2 - k^2},$$

$$y' = \frac{2k(m^2x_1 - ky_1)}{m^2 - k^2} - y_1 = \frac{2km^2x_1 - (m^2 + k^2)y_1}{m^2 - k^2}.$$

把 T 寫成矩陣

兩個坐標都是 x_1, y_1 的線性式，而且沒有常數項，所以

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{M} = \frac{1}{m^2 - k^2} \begin{pmatrix} m^2 + k^2 & -2k \\ 2km^2 & -(m^2 + k^2) \end{pmatrix}.$$

面積

矩陣為 $\mathbf{M}$ 的線性映射（linear map）會把每個面積乘以 $|\det \mathbf{M}|$。從每一行抽出因子 $\frac{1}{m^2-k^2}$，

$$\det \mathbf{M} = \frac{-(m^2+k^2)^2 + 4k^2m^2}{(m^2-k^2)^2} = \frac{-(m^4 - 2m^2k^2 + k^4)}{(m^2-k^2)^2} = \frac{-(m^2-k^2)^2}{(m^2-k^2)^2} = -1.$$

所以 $|\det \mathbf{M}| = 1$，每個區域都被映射到面積相同的區域，這正是所求。負號告訴我們 T 會把定向（orientation）反轉，正如反射（reflection）一樣：一個以逆時針方向描出的圖形，其像是以順時針方向描出的。

想一想 能否用一幅圖畫說明 T 在做甚麼？

可以。PP' 的中點等於 QR 的中點，而後者在 $y = kx$ 上；而且 $y = kx$ 上的點都固定不動（在那裏 $Q = R = P$）。解 $\mathbf{Mv} = -\mathbf{v}$ 得出一行 $2m^2x - 2ky = 0$，所以被 T 反轉的向量就是 (k, m^2) 的倍數。因此 T 是一個斜反射（skew reflection）：它以直線 $y = kx$ 為鏡作反射，但反射的方向是沿 (k, m^2)，而不是垂直於該直線。與任何反射一樣，它滿足 $\mathbf{M}^2 = \mathbf{I}$，這也與作圖吻合：從 P' 出發會得到相同的 Q 和 R，於是回到 P。

驗算

- 取 $m = 2$，$k = 1$，$P = (1, 0)$：$Q = (2, 2)$，$R = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$，所以 $P' = (\frac{5}{3}, \frac{8}{3})$。矩陣是 $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}$，它把 $(1, 0)$ 送到 $(\frac{5}{3}, \frac{8}{3})$，而它的行列式是 $\frac{1}{9}(-25 + 16) = -1$。
- 直線上的點 (t, kt) 應該固定不動：$x' = \frac{(m^2+k^2)t - 2k^2t}{m^2-k^2} = t$。✓
- $\mathbf{M}$ 的跡（trace）是 0，行列式是 -1，所以它的特徵值（eigenvalue）是 ± 1，與反射應有的情況相符。
- 我們以有理數精確運算，隨機選取約 3000 組 m、k 和 P，核對了以上所有公式，以及三角形面積保持不變這一點。

常見錯誤

- 取 $P' = Q + R$ 或 $P' = P + Q + R$，而不是 $Q + R - P$。字母的次序 $PQP'R$ 已告訴你哪些頂點互為對頂點。
- 由 $\det \mathbf{M} = -1$ 推斷面積變成負數。面積的比例因子是 $|\det \mathbf{M}|$；正負號只記錄定向。

STEP 之外

一個線性映射若把某條直線上的每一點都固定，並把另一個方向反轉，它就是一個對合（involution），即 $T^2 = I$。平常的正交反射是其中的特殊情況，即被反轉的方向垂直於該直線；在這裏，這種情況恰好在 (k, m^2) 垂直於 $(1, k)$ 時出現，也就是只有當 $k = 0$ 時（直線 $y = \pm mx$ 關於 x 軸對稱，而不是關於 $y = kx$ 對稱）。在大學裏，這屬於特徵值與對角化（diagonalisation）的課題，在那裏 T 在基（basis）$(1, k), (k, m^2)$ 之下可看成 $\mathrm{diag}(1, -1)$；它也屬於把行列式理解為帶正負號的體積比例因子的課題。斯特朗（Strang）的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門）對這兩個概念都有清晰的講解。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。