詳細解答

STEP III 1993，第 1 題

純數學 • 弧長與體積

STEP III 1993，第 1 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/93-s3-q1

關鍵思路

二倍角公式（double-angle formula）$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ 可把這條參數曲線（parametric curve）直接化為直角坐標（Cartesian）形式，而 θ 的取值範圍則清楚告訴我們所得的是拋物線（parabola）的哪一段。至於長度，$\sqrt{1+16x^2}$ 是採用雙曲代換（hyperbolic substitution）的典型信號，因為 $1+\sinh^2 u = \cosh^2 u$。只要留意到 P 的兩端都落在旋轉軸上，體積便只是一個普通的旋轉體體積（volume of revolution）。

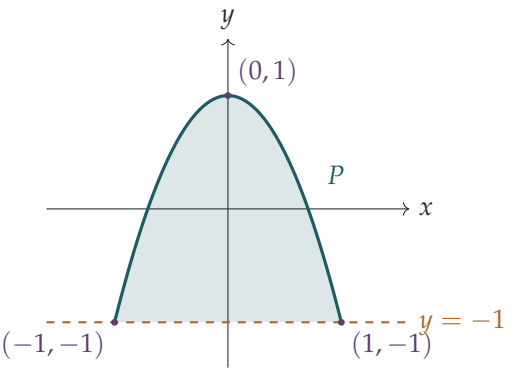
解答

曲線及其略圖

由於 $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ 而 $x = \sin\theta$，

$$y = 1 - 2x^2.$$

因此 P 上每一點都在拋物線 $y = 1 - 2x^2$ 上。當 θ 由 $-\pi/2$ 變到 $\pi/2$ 時，$x = \sin\theta$ 由 -1 穩定地遞增至 1，每個值恰好取一次。所以 P 正是該拋物線上 $-1 \le x \le 1$ 的那段弧。它由 $(-1,-1)$ 上升至頂點（vertex）$(0,1)$，再下降至 $(1,-1)$，並且對稱於 y 軸。



P 的長度

以直角坐標形式計算，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -4x$，所以

$$\text{長度} = \int_{-1}^{1} \sqrt{1+16x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{1} \sqrt{1+16x^2}\,\mathrm{d}x,$$

這裏用到被積函數（integrand）是偶函數（even function）這個事實。（若用參數形式的公式 $\int \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,\mathrm{d}\theta$，代入 $x=\sin\theta$ 後會得到同一個積分。）

想一想 哪一個代換可以令 $\sqrt{1+16x^2}$ 化簡？

我們希望 $16x^2$ 成為一個 $\sinh^2$，所以設 $4x = \sinh u$。於是 $4\,\mathrm{d}x = \cosh u\,\mathrm{d}u$，而 $\sqrt{1+16x^2} = \cosh u$（取正值，因為 $\cosh u > 0$）。積分限 $x = 0, 1$ 變為 $u = 0$ 和 $u = \alpha$，其中 $\alpha = \sinh^{-1} 4$。注意 $\sinh\alpha = 4$ 及 $\cosh\alpha = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$。利用 $\cosh^2 u = \frac{1}{2}(1+\cosh 2u)$，

$$\begin{aligned} 2\int_0^1 \sqrt{1+16x^2}\,\mathrm{d}x &= 2\int_0^\alpha \cosh u \cdot \tfrac{1}{4}\cosh u\,\mathrm{d}u = \tfrac{1}{4}\int_0^\alpha (1+\cosh 2u)\,\mathrm{d}u \\ &= \tfrac{1}{4}\Big[u + \tfrac{1}{2}\sinh 2u\Big]_0^\alpha = \tfrac{1}{4}(\alpha + \sinh\alpha\cosh\alpha) \\ &= \tfrac{1}{4}(\sinh^{-1}4 + 4\sqrt{17}). \end{aligned}$$

所以 P 的長度是 $\sqrt{17} + \frac{1}{4}\sinh^{-1} 4$，正如題目所求。

體積

P 的兩端都在直線 $y=-1$ 上，所以當 P 繞這條直線旋轉時，會掃出一個封閉曲面。它所包圍的立體，正是把 P 與 $y=-1$ 之間的陰影區域旋轉所得的立體。在位置 x 處的切片是一個圓盤，其半徑為

$$y - (-1) = 2 - 2x^2 = 2(1-x^2)\ (\geq 0 \text{ 當 } |x| \leq 1).$$

因此

$$V = \pi \int_{-1}^{1} 4(1-x^2)^2 \,\mathrm{d}x = 8\pi \int_{0}^{1} (1 - 2x^2 + x^4)\,\mathrm{d}x$$
$$= 8\pi\left(1 - \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{5}\right) = 8\pi \cdot \tfrac{8}{15} = \frac{64\pi}{15}.$$

驗算

- 當 $\theta = 0$ 時得 $(0,1)$，當 $\theta = \pm\pi/2$ 時得 $(\pm 1, -1)$，與 $y = 1 - 2x^2$ 吻合。
- 長度 $\sqrt{17} + \frac{1}{4}\sinh^{-1} 4 \approx 4.6468$ 應該略大於由 $(\pm 1, -1)$ 到 $(0,1)$ 的兩條直線弦的總長度，即 $2\sqrt{5} \approx 4.472$。事實確是如此。用中點法則（midpoint rule）在 $[-\pi/2, \pi/2]$ 上計算 $\int \sqrt{\cos^2\theta + 4\sin^2 2\theta}\,\mathrm{d}\theta$，同樣得到 4.64678。
- 帕普斯定理（Pappus's theorem）：該區域的面積為 $\int_{-1}^{1}(2 - 2x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{8}{3}$，其形心（centroid）在旋轉軸上方 $\frac{4}{5}$ 處。所以 $V = 2\pi \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{8}{3} = \frac{64\pi}{15} \approx 13.404$，這也與數值積分的結果相符。

常見錯誤

- 誤把曲線繞 x 軸旋轉，用了半徑 y 而不是 $y + 1$。
- 忘記了 $\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\cosh u\,\mathrm{d}u$ 中的因子 $\frac{1}{4}$，或者沒有把 $\sinh 2\alpha$ 化簡，未有寫成 $2\sinh\alpha\cosh\alpha = 8\sqrt{17}$。

STEP 之外

弧長（arc length）讓我們初次窺見曲線的微分幾何（differential geometry）。如果以弧長 s 來量度曲線上的位置，速率便恆為 1，而方向隨 s 轉動的快慢就是*曲率*（curvature）。對拋物線 $y = 1 - 2x^2$ 而言，曲率在頂點處最大。像上面那樣的雙曲代換，在大學一年級的微積分中隨處可見。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等數學難題》）收錄了更多這種風格的題目。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。