詳細解答

STEP II 1993，第 9 題

純數學 • 複數的輻角

> **STEP II 1993，第 9 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/93-s2-q9

關鍵思路

按照 $0 \le \arg z < 2\pi$ 的約定，「虛部（imaginary part）為正」即是「輻角（argument）嚴格介乎 0 與 π 之間」。複數（complex number）相加就是向量（vector）相加，而若干個全部指向同一個開半平面（open half-plane）的向量，其和仍然留在該半平面內；只要旋轉一下，使 z_1 或 z_3 落在實軸上，題目的不等式就正正是這個事實。至於最後一部分，積的輻角等於各輻角之和（可相差 2π 的倍數），而剛證明的不等式把兩者之差嚴格困在 0 與 2π 之間。

解答

虛部為正

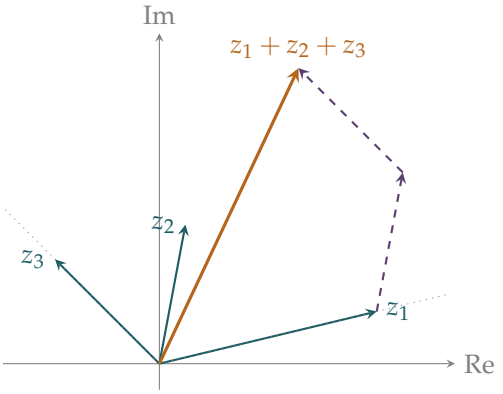
設 $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$，其中 $r > 0$ 且 $0 \le \theta < 2\pi$。那麼 $\operatorname{Im} z = r\sin\theta > 0$ 當且僅當 $\sin\theta > 0$，而在 $[0, 2\pi)$ 上，這當且僅當

$$0 < \arg z < \pi.$$

所以 z 位於上半平面（upper half-plane），而它的輻角永不等於 0 或 π（否則 z 便是實數）。

圖示

設 $\theta_k = \arg z_k$，於是 $0 < \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \pi$。把 z_1、z_2、z_3 畫成由原點出發的箭嘴；然後把它們首尾相接，便到達 $z_1 + z_2 + z_3$。



路徑的每一步相對於前一步都是逆時針轉向（因為 $\theta_1 < \theta_2 < \theta_3$），而且每一步都指向上半平面。路徑起初沿着角度為 θ_1 的射線前進，然後向它的左方彎曲，所以終點嚴格位於該射線的逆時針方向；從另一端回望，路徑的最後一步角度為 θ_3，而在此之前的一切都位於角度為 θ_3 的射線的順時針方向。所以和位於角度為 θ_1 與 θ_3 的兩條射線之間的楔形區域內。

要把這個想法嚴格寫出來，可乘以 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_1}$，即把所有東西順時針旋轉 θ_1：

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_1}(z_1+z_2+z_3) = r_1 + r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_2-\theta_1)} + r_3\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_3-\theta_1)},$$

其中 $r_k = |z_k| > 0$。第一項是正實數，其餘兩項的角度都在 $(0,\pi)$ 內，所以虛部為正。因此右邊的虛部為正，它的輻角 α 滿足 $0 < \alpha < \pi$。於是 $\theta_1 + \alpha$ 是 $z_1+z_2+z_3$ 的一個輻角，而由於 $\theta_1 < \theta_1+\alpha < \theta_1+\pi < 2\pi$，這正是落在 $[0,2\pi)$ 範圍內的那個輻角。所以 $\arg(z_1+z_2+z_3) > \theta_1$。

同樣地，乘以 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_3}$ 得 $r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_3)} + r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_2-\theta_3)} + r_3$，其中首兩個角度都在 $(-\pi,0)$ 內，所以這個數的虛部為負，可以寫成 $\rho\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta}$，其中 $0 < \beta < \pi$。於是 $z_1+z_2+z_3 = \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_3-\beta)}$，其中 $-\pi < \theta_3-\beta < \theta_3 < \pi$。和的虛部為正，所以它的輻角在 $(0,\pi)$ 內，並且與 $\theta_3-\beta$ 相差 2π 的倍數；由於兩個數都在長度為 2π 的區間 $(-\pi,\pi)$ 內，它們必定相等。所以 $\arg(z_1+z_2+z_3) = \theta_3-\beta < \theta_3$，綜合起來就是

$$\arg z_1 < \arg(z_1+z_2+z_3) < \arg z_3.$$

積與和

設 $\varphi = \arg(z_1+z_2+z_3)$，由上一部分可知 $\theta_1 < \varphi < \theta_3$。複數相乘時輻角相加，所以

$$z_1z_2z_3 = r_1r_2r_3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2+\theta_3)},$$

而 $\arg(z_1z_2z_3)$ 就是 $[0,2\pi)$ 內與 $\theta_1+\theta_2+\theta_3$ 相差 2π 的倍數的那個數。

想一想 和 $\theta_1+\theta_2+\theta_3$ 可以是 $(0,3\pi)$ 內的任何數，所以我們不知道應該減去 2π 的哪一個倍數。怎樣才可以避開這個問題，根本不必知道？

我們不必知道：只需要知道，假如 $\arg(z_1z_2z_3)=\varphi$，那麼

$$D=\theta_1+\theta_2+\theta_3-\varphi$$

是 2π 的倍數。現在利用 $\theta_1<\varphi<\theta_3$ 來估計 D 的上下界：

$$D>\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_3=\theta_1+\theta_2>0,$$
$$D<\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_1=\theta_2+\theta_3<2\pi,$$

第一行用到 $\theta_k>0$，第二行用到 $\theta_k<\pi$。所以 $0<D<2\pi$，而嚴格介乎 0 與 2π 之間並沒有 2π 的倍數。因此 $\arg(z_1z_2z_3)$ 永不等於 $\arg(z_1+z_2+z_3)$。

驗算

以圖中的例子 $z_1=2.5+0.6\mathrm{i}$、$z_2=0.3+1.6\mathrm{i}$、$z_3=-1.2+1.2\mathrm{i}$ 來說，三個輻角約為 0.236、1.385 和 2.356，而 $\arg(z_1+z_2+z_3)=\arg(1.6+3.4\mathrm{i})\approx1.131$，確實介乎第一個與最後一個之間。以 200 000 組隨機選取的三個複數（模（modulus）介乎 e^{-4} 與 e^{4} 之間）作測試，兩條不等式和 $0<D<2\pi$ 每一次都成立，而積與和從未指向同一方向。

要明白上半平面這個條件為何重要，可試試 $z_1=z_2=z_3=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}$，即把大小次序放寬至容許相等：積是 1，而和指向 $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}$ 的方向，與 $D=4\pi/3$ 吻合。若讓三個角度都趨近 π，D 就會被推向 2π，可見 $\theta_k<\pi$ 這個上界確實發揮了作用。

常見錯誤

- 直接寫 $\arg(z_1z_2z_3)=\theta_1+\theta_2+\theta_3$：只要這個和等於或大於 2π，這就是錯的。我們只能說兩者在模 2π 的意義下相等。
- 聲稱 $\arg(z_1+z_2+z_3)$ 是各個 θ_k 的某種平均值。事實並非如此（模的大小有影響）；真正成立的只是它嚴格介乎 θ_1 與 θ_3 之間。

STEP 之外

第一個事實其實是說，開半平面(事實上任何角度小於 π 的楔形區域)是一個凸錐（*convex cone*）：其中的向量的正係數組合仍然留在其中。凸錐在線性規劃（linear programming）和最優化（optimisation）中佔有核心地位；而最後一部分要設法繞過的 arg 的多值性（multivaluedness），在複分析（complex analysis）的入門課程中會引出支割線（branch

cut）和複對數（complex logarithm）。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《複分析：可視化方法》）以優美的幾何方式闡述了這兩個概念。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。