詳細解答

STEP II 1993，第 8 題

純數學 • 以數學歸納法證明算術幾何平均不等式

STEP II 1993，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/93-s2-q8

本題在 *Beyond STEP* 第 3.2 節倒過來的 *AM–GM* 中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch03/am-gm-backwards.html

關鍵思路

兩項的不等式（inequality）其實只是說一個平方必定非負。要由 2^m 項推到 2^{m+1} 項，可把整列數分成長度各為 2^m 的兩半，對每一半使用歸納假設（induction hypothesis），然後對兩個半列的平均數使用兩項的不等式。這樣只證明了項數是 2 的冪時的算術平均—幾何平均不等式（AM–GM）；最後一部分用一個巧妙的技巧（出自柯西（Cauchy））補上缺口：用這列數本身的平均數（mean）來填充這列數，這樣既不改變平均數，也不影響乘積的任何要緊之處。

解答

兩項的情況

展開得

$$\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2 - a_1a_2 = \frac{a_1^2+2a_1a_2+a_2^2-4a_1a_2}{4} = \left(\frac{a_1-a_2}{2}\right)^2 \geq 0,$$

所以 $a_1a_2 \leq \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2$，而且等號恰好在 $a_1 = a_2$ 時成立。留意這個結果對任何兩個正數都成立；下文我們會把它用在 a_1 和 a_2 以外的數上。

歸納法

設 $P(m)$ 為以下命題：$(*)$ 對每一列 2^m 個正數都成立。$m = 1$ 的情況就是剛剛證明的兩項不等式。

現在假設 $P(m)$ 成立，並取 2^{m+1} 個正數 $a_1, \ldots, a_{2^{m+1}}$。記 $N = 2^m$，把它們分成各有 N 項的兩半，其平均數分別為

$$X = \frac{a_1 + \cdots + a_N}{N}, \qquad Y = \frac{a_{N+1} + \cdots + a_{2N}}{N}.$$

對每一半應用 $P(m)$，得

$$a_1 \cdots a_N \le X^N \qquad \text{及} \qquad a_{N+1} \cdots a_{2N} \le Y^N.$$

這裏所有的量都是正數，所以可以把這兩個不等式相乘：

$$a_1 \cdots a_{2N} \le X^N Y^N = (XY)^N.$$

由於 X 和 Y 都是正數，兩項的不等式給出 $XY \le \left(\frac{X+Y}{2}\right)^2$。因為 $t \mapsto t^N$ 在 $t > 0$ 時是遞增（increasing）的，把兩邊同時取 N 次方後，不等號的方向不變：

$$(XY)^N \le \left(\frac{X+Y}{2}\right)^{2N}.$$

最後，$\dfrac{X+Y}{2} = \dfrac{(a_1 + \cdots + a_N) + (a_{N+1} + \cdots + a_{2N})}{2N}$ 正是全部 $2N = 2^{m+1}$ 個數的平均數。把以上各個不等式合起來，得

$$a_1 \cdots a_{2^{m+1}} \le \left(\frac{a_1 + \cdots + a_{2^{m+1}}}{2^{m+1}}\right)^{2^{m+1}},$$

這就是 $P(m+1)$。根據歸納法（induction），$(*)$ 對所有正整數 m 都成立。

? **想一想** 像這樣把兩個不等式相乘，是否合理？

若 $0 < p \le q$ 且 $0 < r \le s$，則 $pr \le qr \le qs$，當中先後用到 r 和 q 是正數。沒有正數這個條件，結論便可能不成立（例如 $-3 \le 1$ 及 $-3 \le 1$，但 $9 > 1$），這就是條件 $a_i > 0$ 如此重要的原因。

填充至 2 的冪

題目印出的定義是 $b_1 = a_2$，這必定是 $b_1 = a_1$ 的誤印：我們取 $b_i = a_i$（$1 \le i \le n$）及 $b_i = A$（$n < i \le 2^m$）。每個 b_i 都是正數（因為 A 是若干正數的平均數）。它們的和是

$$b_1 + \cdots + b_{2^m} = (a_1 + \cdots + a_n) + (2^m - n)A = nA + (2^m - n)A = 2^m A,$$

所以各 b_i 的平均數恰好是 A。它們的乘積是 $a_1 \cdots a_n\, A^{2^m-n}$。因此對各 b_i 應用 $(*)$，便得

$$a_1 \cdots a_n\, A^{2^m-n} \le A^{2^m},$$

這正是所要證明的。

算術平均—幾何平均不等式

給定任何正整數 n，選取 m 使得 $2^m > n$（由於 $2^m \to \infty$，這是辦得到的），於是上一步適用。兩邊除以正數 A^{2^m-n}，得

$$a_1 \cdots a_n \le A^n.$$

兩邊都是正數，而 $t \mapsto t^{1/n}$ 在 $t > 0$ 上遞增，所以取 n 次方根，得

$$(a_1 \cdots a_n)^{1/n} \le A = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n},$$

這就是算術平均—幾何平均不等式。（假如 n 剛好是 2 的冪，我們也可以直接引用 $(*)$，但選取 $2^m > n$ 便毋須另外分情況處理。）

驗算

試取 $n = 3$，$a = (1, 2, 6)$：$A = 3$，而取 $m = 2$ 時，填充後的一列數是 $(1, 2, 6, 3)$，其平均數是 3，乘積是 $36 \le 3^4 = 81$；除以 3 得 $12 \le 27 = A^3$，所以 $\sqrt[3]{12} \approx 2.29 \le 3$。此外，當所有 a_i 都相等時，所用到的每個不等式都變成等式，這與預期相符。用電腦以精確的有理數運算，對數千列隨機數檢驗 $m \le 6$ 時的 $(*)$ 以及 $n \le 40$ 時的最終不等式，並沒有發現任何反例。

常見錯誤

- 把歸納假設一次過用在全部 2^{m+1} 項上：歸納假設只涵蓋長度為 2^m 的數列，所以必須分成兩半。
- 忘記檢查填充後的一列數的平均數仍然是 A；這正是用 A 而不用其他數來填充的全部意義所在。
- 取 n 次方根或作除法時，沒有指出有關的量都是正數。

STEP 之外

這種「向前—向後」歸納法就是柯西對算術平均—幾何平均不等式的證明：先對 2 的冪證明，再回頭降到每一個 n。算術平均—幾何平均不等式也是琴生不等式（Jensen's inequal-

ity）應用於凹函數（concave function）ln 時的特殊情況，而一整族的冪平均（power-mean）不等式、赫爾德（Hölder）不等式和閔可夫斯基（Minkowski）不等式，都是由同樣的想法發展出來的；這些都是大學一年級分析學（analysis）的基本工具。Bartle 與 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（實分析入門）從一開始就運用這類不等式，而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（高等數學難題）則提供更多 STEP 風格的練習。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。