詳細解答

STEP II 1993，第 7 題

純數學 • 模 5 的無窮遞降法

> **STEP II 1993，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/93-s2-q7

關鍵思路

等式右邊是 5 的倍數，所以改以模（modulo）5 來考慮，方程便化為一個小規模的有限驗算：平方數模 5 只可能是 0、1 或 4 $(\mathrm{mod}\ 5)$。一旦迫使 a 和 b 都是 5 的倍數，方程便迫使 c 也是 5 的倍數，而把各數全部除以 5 就得到一個更小的解。非零整數不可能無止境地被 5 整除，這正是費馬（Fermat）的無窮遞降法（infinite descent）。

解答

a 和 b 可被 5 整除

把模 5 的每個剩餘（residue）逐一平方：

$x\ (\mathrm{mod}\ 5)$	0	1	2	3	4
$x^2\ (\mathrm{mod}\ 5)$	0	1	4	4	1
$2x^2\ (\mathrm{mod}\ 5)$	0	2	3	3	2

所以 $b^2 \equiv 0, 1$ 或 4，而 $2a^2 \equiv 0, 2$ 或 $3\ (\mathrm{mod}\ 5)$。由於 $5c^2 \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 5)$，我們需要

$$2a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod 5.$$

現在列出所有組合：

$2a^2 + b^2$	$b^2 \equiv 0$	$b^2 \equiv 1$	$b^2 \equiv 4$
$2a^2 \equiv 0$	**0**	1	4
$2a^2 \equiv 2$	2	3	1
$2a^2 \equiv 3$	3	4	2

表中唯一等於 0 的一格，就是 $2a^2 \equiv 0$ 且 $b^2 \equiv 0$ 的那一格。由第一個表可見，只有當 $x \equiv 0$ 時才有 $x^2 \equiv 0 \pmod 5$（換句話說，5 是質數（prime），所以 $5 \mid x^2$ 蘊含 $5 \mid x$）。因此 $a \equiv 0$ 且 $b \equiv 0 \pmod 5$：a 和 b 都可被 5 整除，這正是所要證明的。

唯一的解是 $a = b = c = 0$

設 $a = 5p$ 及 $b = 5q$，其中 p, q 為整數。代入後得

$$25(2p^2 + q^2) = 5c^2 \quad \Longrightarrow \quad c^2 = 5(2p^2 + q^2).$$

所以 $5 \mid c^2$，而由於 5 是質數，故 $5 \mid c$。設 $c = 5r$。於是 $25r^2 = 5(2p^2 + q^2)$，即

$$2p^2 + q^2 = 5r^2.$$

這又是原來的方程。所以若 (a, b, c) 是一個解，則三個數都可被 5 整除，而且 $(a/5,\, b/5,\, c/5)$ 也是一個整數解。

> **想一想** 為甚麼「可以一直除以 5」就迫使所有數都等於零？

重複運用這一步。從一個解 (a, b, c) 出發，經過 n 步之後，我們得到整數解 $(a/5^n,\, b/5^n,\, c/5^n)$，所以 5^n 整除 a、b 和 c 每一個，而且這對每一個 $n \geq 1$ 都成立。

然而，非零整數 m 只能被 5 整除有限次：若 $5^n \mid m$ 且 $m \neq 0$，則 $5^n \leq |m|$，而當 n 足夠大時這便不成立。所以 a、b、c 沒有一個可以是非零的。

同一個論證也可以寫成遞降的形式：假設存在 $c \neq 0$ 的解，並從中選取 $|c|$ 為正數而又盡可能小的一個。那麼 $(a/5, b/5, c/5)$ 也是一個解，並且 $0 < |c/5| < |c|$，矛盾。所以 $c = 0$，於是 $2a^2 + b^2 = 0$ 迫使 $a = b = 0$，因為兩項都是非負的。

因此，唯一的整數解是 $a = b = c = 0$。

驗算

- 逐一檢查全部 25 對剩餘 $(a, b) \bmod 5$：只有 $(0, 0)$ 使得 $2a^2 + b^2 \equiv 0$。
- 以電腦搜尋所有 $|a|, |b| \leq 300$，發現 $2a^2 + b^2 = 5c^2$ 除了 $a = b = c = 0$ 之外並無其他解。
- 試與 $a^2 + b^2 = 5c^2$ 比較，這個方程*確實*有非平凡解，例如 $(1, 2, 1)$：在這情況下 $1 + 4 \equiv 0 \pmod 5$，所以第一部分的剩餘論證不再成立，而這正是應有的結果。

常見錯誤

- 沒有說明理由，就由 $5 \mid a^2$ 推斷 $5 \mid a$。這個結論是對的，因為 5 是質數（或可由表得出），但必須寫明。
- 忘記證明 c 同樣可被 5 整除。缺少這一步，$(a/5, b/5, c/5)$ 就未必是整數解，遞降也就無從開始。
- 寫到「可以再除以 5」就停筆。必須說明為甚麼重複整除會迫使各數為零，證明才算完整。

STEP 之外

這就是費馬的無窮遞降法，同一方法可以證明 $\sqrt{2}$ 是無理數，以及 $x^4 + y^4 = z^2$ 沒有非平凡解。像 $2a^2 + b^2 = 5c^2$ 這類方程，在數論中有系統的研究：勒讓德（Legendre）定理以二次剩餘（quadratic residue）為工具，給出 $Ax^2 + By^2 = Cz^2$ 有非平凡整數解的確切條件。在本題中，障礙在於 -2 不是模 5 的平方數。Davenport 的 *The Higher Arithmetic* 一書涵蓋同餘（congruence）、二次剩餘和遞降法。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。