詳細解答

STEP II 1993，第 6 題

純數學 • 矩陣代數的反例

> **STEP II 1993，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/93-s2-q6

本題在 *Beyond STEP* 第 7.1 節對矩陣不成立的法則中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch07/matrix-rules.html

關鍵思路

每一個斷言對實數而言都是成立的，所以這道題其實是在問：普通代數裏的哪些習慣，換成矩陣(matrix)之後仍然管用。有兩件事會失效：矩陣乘法不一定可交換(commute)，而且兩個非零矩陣的乘積可以是零矩陣。只要精心挑選一對非常簡單的矩陣，就能解決 (i) 和 (ii)；伴隨矩陣（adjugate matrix）解決 (iii)；而一個重「根」再加上一點冪零（nilpotent）的變化，就解決 (iv)。

解答

以下一律以 $\mathbf{I}$ 表示 2×2 單位矩陣（identity matrix），以 $\mathbf{0}$ 表示零矩陣。

第 (i) 部分

錯誤。取

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\qquad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},$$

兩者皆非零。於是

$$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\qquad \mathbf{BA}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\neq\mathbf{0}.$$

想一想 怎樣才能找出這樣的反例（counterexample），而不是單靠瞎猜？

我們想要 $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$，所以 $\mathbf{B}$ 的每一列都必須被 $\mathbf{A}$ 化為零。上面的矩陣 $\mathbf{A}$ 會把任何形如 $(0, y)^{\mathsf{T}}$ 的向量化為零，因此我們可以把 $\mathbf{B}$ 的各列都取成這個形式。然後只需檢查 $\mathbf{BA}$ 會不會碰巧也等於零；採用最顯而易見的選擇時，它並不等於零。

第 (ii) 部分

錯誤。小心展開，並保持每個乘積的次序，

$$(\mathbf{A}-\mathbf{B})(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 + \mathbf{AB} - \mathbf{BA} - \mathbf{B}^2,$$

所以該斷言恰好在 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ 時成立。第 (i) 部分的兩個矩陣不可交換，因此它們就是一個反例：在那裏 $\mathbf{AB} - \mathbf{BA} = -\mathbf{BA} \neq \mathbf{0}$。具體計算，

$$(\mathbf{A}-\mathbf{B})(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中用到 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}^2 = \mathbf{0}$。

第 (iii) 部分

正確。我們證明兩個方向。

*若 $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ 有非零解，則 $\det \mathbf{A} = 0$。*我們證明其逆否命題（contrapositive）。假設 $\det \mathbf{A} \neq 0$。那麼 $\mathbf{A}^{-1}$ 存在，而由 $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ 可得 $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{AX} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$。所以唯一的解是零矩陣。

*若 $\det \mathbf{A} = 0$，則存在非零解。*設

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

（即 $\mathbf{X}$ 是 $\mathbf{A}$ 的伴隨矩陣）。乘出來，

$$\mathbf{AX} = \begin{pmatrix} ad - bc & -ab + ba \\ cd - dc & -cb + da \end{pmatrix} = (\det \mathbf{A})\,\mathbf{I} = \mathbf{0}.$$

$\mathbf{X}$ 的元素就是 $\mathbf{A}$ 的元素重新排列，並改變了其中一些正負號，而 $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$，所以 $\mathbf{X} \neq \mathbf{0}$。證明至此完成。請留意這裏用到了 $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ 這個假設：正是它保證伴隨矩陣非零。

第 (iv) 部分

錯誤。對數而言，二次方程（quadratic）最多有兩個根，但這個事實的證明用到「若 $pq = 0$，則 $p = 0$ 或 $q = 0$」，而第 (i) 部分剛剛說明了這一點對矩陣並不成立。因此，我們應

該找一個可以因式分解成完全平方的二次式。取 $\mathbf{A} = -2\mathbf{I}$ 和 $\mathbf{B} = \mathbf{I}$，兩者皆非零。由於 $\mathbf{I}$ 與任何矩陣都可交換，

$$\mathbf{X}^2 - 2\mathbf{X} + \mathbf{I} = (\mathbf{X} - \mathbf{I})^2,$$

所以我們需要 $(\mathbf{X} - \mathbf{I})^2 = \mathbf{0}$。任何滿足 $\mathbf{N}^2 = \mathbf{0}$ 的矩陣 $\mathbf{N}$ 都可以用作 $\mathbf{X} - \mathbf{I}$，而這樣的矩陣有無限多個。對每個實數 t，設

$$\mathbf{X}_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

於是

$$\mathbf{X}_t^2 - 2\mathbf{X}_t + \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2t \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

每個 $\mathbf{X}_t$ 都非零，而不同的 t 值給出不同的矩陣。所以這個方程有無限多個解，而不是最多兩個。

想一想 $\mathbf{A} = -2\mathbf{I}$、$\mathbf{B} = \mathbf{I}$ 有甚麼特別之處嗎？

其實沒有。取 $\mathbf{A} = -2\lambda\mathbf{I}$ 和 $\mathbf{B} = \lambda^2\mathbf{I}$（$\lambda \neq 0$ 為任意數），則每個 $\mathbf{X} = \lambda\mathbf{I} + \mathbf{N}$（其中 $\mathbf{N}^2 = \mathbf{0}$）都是解。冪零矩陣本身就構成一個龐大的族：對所有實數 p、q，$\begin{pmatrix} pq & -p^2 \\ q^2 & -pq \end{pmatrix}$ 的平方都是 $\mathbf{0}$。關鍵只在於這個二次式可以分解成兩個矩陣的乘積，而這樣的乘積等於零的方式，遠比數的情況多。

驗算

親手把每個反例乘出來：在 (i) 中，$\mathbf{AB}$ 的每個元素都是 0，而 $\mathbf{BA}$ 的左下角有一個 1。恆等式 $(\mathbf{A} - \mathbf{B})(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2 + \mathbf{AB} - \mathbf{BA}$ 已用 1000 對隨機整數矩陣測試過，而 $\mathbf{A}\operatorname{adj}\mathbf{A} = \mathbf{0}$ 且 $\operatorname{adj}\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ 亦已用 2000 個隨機奇異矩陣（singular matrix）測試過。在 (iv) 中，試取 $t = 3$：$\mathbf{X}_3^2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，且 $\mathbf{X}_3^2 - 2\mathbf{X}_3 + \mathbf{I} = \mathbf{0}$。

常見錯誤

- 展開 $(\mathbf{A} - \mathbf{B})(\mathbf{A} + \mathbf{B})$ 時，當作 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ 來處理。在 (ii) 中只寫「錯誤」而不給出具體反例，得分甚少：題目要求的正是反例。
- 在 (iii) 中，只證明了「當且僅當」（if and only if）的其中一個方向。
- 在 (iv) 中，用求根公式或因式分解去「解」這個二次方程，然後斷定 $\mathbf{X} = \mathbf{I}$ 是唯一的根。因式分解本身沒有問題，但 $\mathbf{P}^2 = \mathbf{0}$ 並不意味着 $\mathbf{P} = \mathbf{0}$。

STEP 之外

2×2 實矩陣構成一個帶有零因子的非交換環（*non-commutative ring with zero divisors*），而這道題的每一部分，都在考驗一條在域（field）中成立、在這樣的環中卻失效的定律。第 (iii) 部分是線性代數（linear algebra）一條核心定理的 2×2 情形：一個方陣有非平凡的零空間（null space），當且僅當它的行列式（determinant）等於零。像 (iv) 中那些滿足 $\mathbf{N}^2 = \mathbf{0}$ 的矩陣稱為冪零矩陣，是若爾當標準形（Jordan normal form）的關鍵組成部分。線性代數方面可參考 Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*，環論（ring theory）方面可參考 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。