詳細解答

STEP II 1993，第 5 題

純數學 • 極坐標曲線與弧長

STEP II 1993，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/93-s2-q5

關鍵思路

R 處的直角讓我們只需用 OQ 和小角 $\delta\theta$，便可從直角三角形 ORQ 讀出小三角形 PQR 的每一條邊長。取 $Q \to P$ 時的極限（limit），弦（chord）PQ 便變成切線（tangent）。對於這條螺線，$\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$ 是 r 的常數倍，所以 $r\,\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}r$ 處處相同，而弧長（arc length）的被積函數（integrand）只是一個指數函數。

解答

曲線與半徑之間的夾角

點 R 位於直線 OP（的延長線）上，而 $\angle ORQ$ 是直角。在直角三角形 ORQ 中，斜邊（hypotenuse）是 $OQ = r + \delta r$，O 處的角是 $\delta\theta$，所以

$$QR = (r+\delta r)\sin\delta\theta, \qquad OR = (r+\delta r)\cos\delta\theta.$$

由於 $OP = r$，我們有 $PR = OR - OP = (r+\delta r)\cos\delta\theta - r$。三角形 PRQ 的直角在 R，所以

$$\tan\angle QPR = \frac{QR}{PR} = \frac{(r+\delta r)\sin\delta\theta}{(r+\delta r)\cos\delta\theta - r}.$$

當 $\delta\theta$ 很小時，我們有 $\sin\delta\theta = \delta\theta + O(\delta\theta^3)$ 和 $\cos\delta\theta = 1 + O(\delta\theta^2)$，所以

$$\tan\angle QPR = \frac{r\,\delta\theta + \delta r\,\delta\theta + \cdots}{\delta r + O(\delta\theta^2)} = \frac{r\dfrac{\delta\theta}{\delta r} + \delta\theta + \cdots}{1 + O\left(\dfrac{\delta\theta^2}{\delta r}\right)},$$

其中省略號代表與已列出的項相比很小的項。當 $Q \to P$ 時，δr 和 $\delta\theta$ 都趨向 0，且 $\delta\theta/\delta r \to \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}r$。所以 $\delta\theta^2/\delta r = \delta\theta \cdot (\delta\theta/\delta r) \to 0$，同時 $\delta\theta \to 0$。因此

$$\tan\angle QPR \to r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}.$$

想一想 為甚麼 $\angle QPR$ 的極限就是曲線與 OP 相交的角度？

角 QPR 是弦 PQ 與通過 P 的半徑線之間的夾角。當 $Q \to P$ 沿曲線移動時，弦 PQ 便變成 P 處的切線。所以在極限之下，$\angle QPR$ 變成切線與 OP 之間的夾角，這正是「曲線與 OP 相交的角度」的意思。因此該角是

$$\tan^{-1}\left(r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}\right),$$

正如所求。

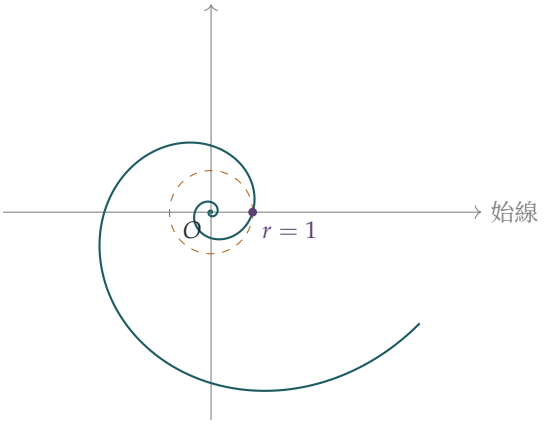
等角螺線

對於 $r = \mathrm{e}^{\theta\cot\alpha}$，

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \cot\alpha\,\mathrm{e}^{\theta\cot\alpha} = r\cot\alpha, \qquad \text{所以} \qquad r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r} = \frac{r}{r\cot\alpha} = \tan\alpha.$$

因為 $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$，角 α 位於 $\tan^{-1}$ 的值域之內，所以 $\tan^{-1}(\tan\alpha) = \alpha$。這個結果與 θ 無關，所以螺線在每一點都以角 α 與每條半徑線相交。

草圖。由於 $\cot\alpha > 0$，r 隨 θ 穩定地增加。每轉一整圈，r 便乘以固定的因子 $\mathrm{e}^{2\pi\cot\alpha}$。當 $\theta \to -\infty$ 時，$r \to 0$，所以曲線繞原點無限多圈，卻永遠到不了原點。當 $\theta \to +\infty$ 時，它以逆時針方向向外盤旋。當 $\theta = 0$ 時，它在 $r = 1$ 處與始線（initial line）相交。草圖採用 $\cot\alpha = 0.3$。



虛線圓是 $r = 1$。螺線在圓內的部分就是那無限向內捲繞的一段。

弧長

利用題目給出的公式和 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta = r\cot\alpha$，

$$\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 = r^2 + r^2\cot^2\alpha = r^2\operatorname{cosec}^2\alpha, \qquad \text{所以} \qquad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{e}^{\theta\cot\alpha}}{\sin\alpha},$$

這裏取正根，因為 s 隨 θ 增加，而且 $\sin\alpha > 0$。

由 $r = 1$ 開始向外走的完整一圈，是從 $\theta = 0$ 到 $\theta = 2\pi$。它的長度是

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{\theta\cot\alpha}}{\sin\alpha}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\sin\alpha}\cdot\frac{\mathrm{e}^{2\pi\cot\alpha}-1}{\cot\alpha} = \sec\alpha\left(\mathrm{e}^{2\pi\cot\alpha}-1\right).$$

$r \le 1$ 的部分對應 $\theta \le 0$，即 $-\infty < \theta \le 0$。它的長度是反常積分（improper integral）

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{e}^{\theta\cot\alpha}}{\sin\alpha}\,\mathrm{d}\theta = \lim_{T\to\infty}\frac{1-\mathrm{e}^{-T\cot\alpha}}{\sin\alpha\cot\alpha} = \sec\alpha,$$

因為 $\cot\alpha > 0$ 使得 $\mathrm{e}^{-T\cot\alpha} \to 0$。所以即使這部分繞原點無限多圈，它的總長度仍是有限的，就是 $\sec\alpha$。

驗算

- 當 $\alpha \to \frac{1}{2}\pi$ 時，我們有 $\cot\alpha \to 0$，螺線變成單位圓，而每條半徑都與它成直角相交。一圈的長度是 $\sec\alpha(\mathrm{e}^{2\pi\cot\alpha}-1) \approx \sec\alpha\cdot 2\pi\cot\alpha = 2\pi\operatorname{cosec}\alpha \to 2\pi$，即圓周。
- 對 $\sec\alpha$ 有一個漂亮的幾何驗算：沿螺線由任意一點到原點的長度是 $r\sec\alpha$，這正是由該點到通過 O 且垂直於 OP 的直線的切線段長度。
- 數值上，取 $\alpha = 0.9$，把 2×10^5 條弦加起來，得出一圈的長度為 233.8349，內側部分的長度為 1.608726。這些數值與 $\sec\alpha(\mathrm{e}^{2\pi\cot\alpha}-1)$ 和 $\sec\alpha$ 吻合，至少準確至八位有效數字。

常見錯誤

- 寫下 $PR = \delta r$ 和 $QR = r\,\delta\theta$ 而不解釋原因。兩者都只在一階近似下成立，而極限論證正是這道題要考核的地方。
- 計算內側部分時在 $[0, 2\pi]$ 上積分，而不是在 $(-\infty, 0]$ 上積分。$r \le 1$ 的部分包含無限多圈，而不是一圈。

STEP 之外

等角螺線（equiangular spiral，又稱對數螺線）是自相似（self-similar）的：把它按 $e^{2\pi\cot\alpha}$ 或任何因子縮放，都會得到旋轉後的同一條曲線。用複數表示，它是 $z = e^{(\cot\alpha+i)\theta}$，即一條直線在指數映射下的像，而夾角恆定這一點，源於 exp 是保角（conformal）的（即它保持角度不變）。Needham 的 *Visual Complex Analysis* 把這幅圖像闡述得非常精彩。一條無限捲繞的曲線竟有有限的長度，這讓人初次嘗到大學第一門分析課程中會遇到的反常積分與收斂（convergence）問題的滋味。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。