詳細解答

STEP II 1993，第 4 題

純數學 • 偏斜線與最接近距離

> **STEP II 1993，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/93-s2-q4

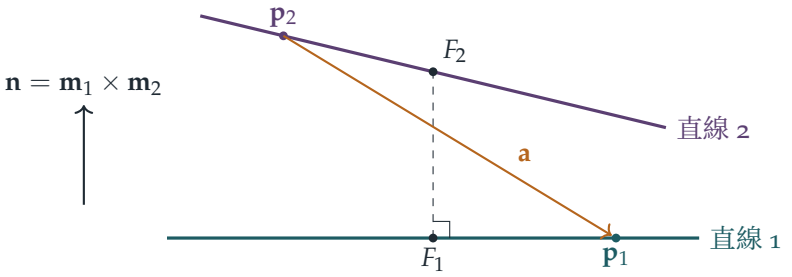
關鍵思路

由一條直線上的點連到另一條直線上的點的任何向量，沿公共法向量（common normal）$\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2$ 的分量（component）都相同，因為沿任何一條直線移動，只會加上 $\mathbf{m}_1$ 和 $\mathbf{m}_2$ 的倍數，而這兩個向量都與該法向量垂直。這個固定的分量就是最短距離。至於飛機的部分，竅門是在 A_2 的參考系（frame）中考慮：由 A_2 指向 A_1 的向量沿單一一條直線移動，所以最接近時的距離就是一點到一條直線的距離。

解答

兩條直線之間的最短距離

設 $\mathbf{a} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2$ 及 $\mathbf{n} = \mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2$，由於兩條直線不平行，後者不是零向量，而且同時垂直於 $\mathbf{m}_1$ 和 $\mathbf{m}_2$。



草圖顯示了這兩條直線（它們是異面直線（skew lines），所以不相交）、由 $\mathbf{p}_2$ 指向 $\mathbf{p}_1$ 的向量 $\mathbf{a}$，以及與 $\mathbf{n}$ 平行的公垂線（common perpendicular）F_1F_2。

由直線 2 上一點指向直線 1 上一點的一般向量是

$$\mathbf{d} = \mathbf{a} + t_1\mathbf{m}_1 - t_2\mathbf{m}_2.$$

由於 $\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n} = 0$，它沿單位法向量（unit normal）$\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{n}/|\mathbf{n}|$ 的分量是

$$\mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}},$$

無論 t_1, t_2 怎樣選取，結果都一樣。向量的長度不會小於它的任何一個分量，所以 $|\mathbf{d}| \geq |\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}}|$，而等號恰好在 $\mathbf{d}$ 與 $\mathbf{n}$ 平行時成立。等號確實可以成立：$\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{n}$ 不共面，所以它們構成一組基（basis），我們可以寫成 $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{m}_1 + \beta\mathbf{m}_2 + \gamma\mathbf{n}$；取 $t_1 = -\alpha$、$t_2 = \beta$，便剩下 $\mathbf{d} = \gamma\mathbf{n}$。這個選擇給出草圖中的垂足 F_1, F_2。從圖中看，最短距離就是 $\mathbf{a}$ 在 $\mathbf{n}$ 方向上的「高度」。因此最短距離是

$$|\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}}| = \frac{|(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \cdot (\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2)|}{|\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2|}.$$

第 (i) 部分

這裏 $\mathbf{a} = (1, 1, 1)$。把 $\mathbf{m}_1$ 和 $\mathbf{m}_2$ 換成它們的任何非零倍數，公式都不變，因為這些因子在分子和分母中互相約去，所以我們可以用 $(4, 3, 0)$ 和 $(0, -3, 1)$：

$$(4, 3, 0) \times (0, -3, 1) = (3, -4, -12), \qquad |(3, -4, -12)| = \sqrt{9 + 16 + 144} = 13.$$

於是 $(1, 1, 1) \cdot (3, -4, -12) = -13$，所以最短距離是 $13/13 = 1$。

第 (ii) 部分

在時間 t，兩架飛機分別位於 $\mathbf{p}_1 + v_1 t\,\mathbf{m}_1$ 和 $\mathbf{p}_2 + v_2 t\,\mathbf{m}_2$，所以由 A_2 指向 A_1 的向量是

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{w}, \qquad \mathbf{w} = v_1\mathbf{m}_1 - v_2\mathbf{m}_2.$$

由於 $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2$ 不平行，$\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$（除非兩個速率都是零）。我們把飛行過程理解為包括所有時間，即 $t = 0$ 之前和之後。於是

$$|\mathbf{r}(t)|^2 = |\mathbf{a}|^2 + 2t\,\mathbf{a} \cdot \mathbf{w} + t^2|\mathbf{w}|^2,$$

這是 t 的二次式，首項係數為正。配方（completing the square）後得

$$|\mathbf{r}(t)|^2 = |\mathbf{w}|^2\Big(t + \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{w}}{|\mathbf{w}|^2}\Big)^2 + |\mathbf{a}|^2 - \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{w})^2}{|\mathbf{w}|^2},$$

所以最小值在 $t = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{w}/|\mathbf{w}|^2$ 時取得，其值為

$$d^2 = \frac{|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2|^2\,|v_1\mathbf{m}_1 - v_2\mathbf{m}_2|^2 - [(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \cdot (v_1\mathbf{m}_1 - v_2\mathbf{m}_2)]^2}{|v_1\mathbf{m}_1 - v_2\mathbf{m}_2|^2},$$

這正是所求。從幾何上看，d 是原點到直線 $\mathbf{r} = \mathbf{a} + t\mathbf{w}$ 的距離，即 $|\mathbf{a}| \sin\theta$，其中 θ 是 $\mathbf{a}$ 與 $\mathbf{w}$ 之間的夾角。

第 (iii) 部分

先給出一個不需要任何代數運算的下界：在每一刻，A_1 都在直線 1 上，A_2 都在直線 2 上，所以由第 (i) 部分可知 $d \geq 1$。等號成立的話，兩架飛機必須在同一時間分別位於垂足 F_1、F_2。

> **想一想** A_2 的機師真的可以做到這一點嗎？

先求垂足。要求 $\mathbf{a} + t_1\mathbf{m}_1 - t_2\mathbf{m}_2$ 同時垂直於 $\mathbf{m}_1$ 和 $\mathbf{m}_2$，並利用 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{m}_1 = \frac{7}{5}$、$\mathbf{a}\cdot\mathbf{m}_2 = -\frac{2}{\sqrt{10}}$ 及 $\mathbf{m}_1\cdot\mathbf{m}_2 = -\frac{9}{5\sqrt{10}}$，解這兩條線性方程便得

$$t_1 = -\tfrac{20}{13}, \qquad t_2 = \tfrac{\sqrt{10}}{13}.$$

A_1 在時間 $t_1/v_1 < 0$ 位於 F_1，但當 $v_2 > 0$ 時，A_2 在時間 $t_2/v_2 > 0$ 才位於 F_2。這兩個時間永遠不可能相同：F_1 在 $\mathbf{p}_1$ 的後方，而 F_2 在 $\mathbf{p}_2$ 的前方。所以若 A_2 沿 $\mathbf{m}_2$ 的方向飛行，$d = 1$ 這個值是達不到的。要知道可以達到甚麼值，我們利用第 (ii) 部分。

設 $v_2 = \sqrt{10}\,\lambda v_1$，所以 λ 是經過縮放的速率比。於是

$$\mathbf{w} = v_1\left(\tfrac{1}{5}(4,3,0) - \lambda(0,-3,1)\right) = \tfrac{v_1}{5}(4,\ 3+15\lambda,\ -5\lambda),$$

而因子 $\frac{v_1}{5}$ 在 d^2 的公式中會約去。利用 $|\mathbf{a}|^2 = 3$，

$$\mathbf{a}\cdot(4,3+15\lambda,-5\lambda) = 7+10\lambda, \qquad |(4,3+15\lambda,-5\lambda)|^2 = 25+90\lambda+250\lambda^2,$$

所以

$$d^2 = 3 - \frac{(7+10\lambda)^2}{25+90\lambda+250\lambda^2} = \frac{26+130\lambda+650\lambda^2}{25+90\lambda+250\lambda^2} = \frac{26}{5}\cdot\frac{1+5\lambda+25\lambda^2}{5+18\lambda+50\lambda^2}.$$

對最後一個分式 N/D 求導，導數的分子可以化簡：

$$\begin{aligned} N'D - ND' &= (5+50\lambda)(5+18\lambda+50\lambda^2) - (1+5\lambda+25\lambda^2)(18+100\lambda) \\ &= 7+150\lambda+200\lambda^2 = (1+20\lambda)(7+10\lambda). \end{aligned}$$

所以，把 d^2 看成所有實數 λ 的函數時，它在 $\lambda = -\frac{7}{10}$ 取得極大值（此時 $\mathbf{a}\perp\mathbf{w}$ 而 $d=\sqrt{3}$），並在 $\lambda = -\frac{1}{20}$ 取得極小值，此時

$$d^2 = \frac{26}{5}\cdot\frac{1-\frac{1}{4}+\frac{1}{16}}{5-\frac{9}{10}+\frac{1}{8}} = \frac{26}{5}\cdot\frac{13/16}{169/40} = 1.$$

這就是下界 $d = 1$，在 $v_2 = -\frac{v_1}{2\sqrt{10}}$ 時達到，與由垂足求得的 t_2/t_1 吻合。

所以兩架飛機最接近時可以相距 $d = 1$，即兩條直線之間的最短距離，而不能再近。要做到這一點，A_2 的機師須沿直線 2 以 $-\mathbf{m}_2$ 的方向、以速率 $\frac{v_1}{2\sqrt{10}}$ 飛行：用題目的記號，

就是 $v_2 = -\frac{v_1}{2\sqrt{10}}$，這是沿 $\mathbf{m}_2$ 的速度而不是速率。這樣兩架飛機便會在同一刻到達公垂線的兩個垂足。這重現了第 (i) 部分的答案，相信這正是考官的原意。留意答案只取決於比值 v_2/v_1。

*關於正速率的備註。*如果 v_2 必須是真正的速率，即 $v_2 > 0$ 及 $\lambda > 0$，那麼 $(1+20\lambda)(7+10\lambda) > 0$，而 d^2 對 v_2 嚴格遞增：

$$d^2 \to \frac{26}{25} \quad \text{當} v_2 \to 0^+, \qquad d^2 \to \frac{13}{5} \quad \text{當} v_2 \to \infty.$$

按這種理解，並不存在最佳速率：機師飛得愈慢，效果愈好，最接近時的距離可以任意接近 $\frac{\sqrt{26}}{5} \approx 1.020$，即 $\mathbf{p}_2$ 到直線 $\imath$ 的距離，但永遠達不到這個值。

驗算

- (i) 中的公垂線：取 $t_1 = -\frac{20}{13}$、$t_2 = \frac{\sqrt{10}}{13}$ 時，連接兩點的向量是 $\frac{1}{13}(-3,4,12)$，它與 $(3,-4,-12)$ 平行，長度恰好是 1。
- 用電腦對隨機選取的速率以直接搜尋法求 $|\mathbf{r}(t)|$ 的最小值，結果與 (ii) 中的公式吻合，誤差在 10^{-6} 以內。電腦亦在 $[-2,2]$ 上掃描了 v_2/v_1：最小值是 $d^2 = 1.0000$，在 $v_2/v_1 \approx -0.1581 = -1/(2\sqrt{10})$ 時取得，而當 $v_2 > 0$ 時，d^2 由 1.04 開始上升。
- 極限情況：$v_2 = 0$ 時 A_2 是固定在 $\mathbf{p}_2$ 的一點，而 $3 - (\frac{7}{5})^2 = \frac{26}{25}$ 確實是 $\mathbf{p}_2$ 到直線 $\imath$ 的距離的平方。

常見錯誤

- 以「1，由第 (i) 部分可得」回答 (iii)，卻沒有檢查兩架飛機能否在同一刻到達公垂線的垂足。
- 忘記了 (ii) 中的公式不受 $\mathbf{w}$ 的縮放影響，結果帶着 v_1 做了好幾頁代數運算。
- 在直線距離公式中漏掉絕對值，得出 -1。

STEP 之外

第 (ii) 部分是*正交投影*（orthogonal projection）的一個小例子：d 是 $\mathbf{a}$ 垂直於 $\mathbf{w}$ 的分量的長度，而 $|\mathbf{a}|^2|\mathbf{w}|^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{w})^2 = |\mathbf{a}\times\mathbf{w}|^2$ 是格拉姆行列式（Gram determinant），即以 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{w}$ 為邊的平行四邊形面積的平方。大學第一門線性代數課程中的最小二乘法（least squares）擬合，正是建基於同一個投影概念。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門）對此有十分精彩的闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。