詳細解答

STEP II 1993，第 3 題

純數學 • 里卡蒂微分方程

> **STEP II 1993，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/93-s2-q3

關鍵思路

兩條方程都因為 y^2 項而成為非線性（nonlinear）方程，所以標準的一階方程解法都不能直接套用。題目給出的代換（substitution）正是為了消去這個 y^2 項而設計的。在 (i) 中，把 y 寫成 u'/u 的倍數，平方項便會互相抵消，剩下一條常係數的二階線性方程。在 (ii) 中，$y = 1/x$ 剛好是一個精確解，而寫成 $y = 1/x + 1/v$ 後，方程便化為關於 v 的一階線性方程，可用積分因子（integrating factor）求解。

解答

第 (i) 部分

設 $y = -\dfrac{u'}{3u}$，其中 $u' = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$。由商法則（quotient rule），

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{u''}{3u} + \frac{(u')^2}{3u^2}, \qquad \text{而} \qquad 3y^2 = 3 \cdot \frac{(u')^2}{9u^2} = \frac{(u')^2}{3u^2}.$$

於是那些麻煩的項互相抵消：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 3y^2 = -\frac{u''}{3u}.$$

因此方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y - 3y^2 = -2$ 變成

$$-\frac{u''}{3u} + \frac{u'}{3u} = -2.$$

兩邊乘以 $-3u$（其中 $u \neq 0$，這本來就是 y 有定義所必需的），得

$$u'' - u' - 6u = 0.$$

輔助方程（auxiliary equation）為 $m^2 - m - 6 = (m-3)(m+2) = 0$，所以 $m = 3$ 或 $m = -2$，而

$$u = Ae^{3x} + Be^{-2x}$$

其中 A 和 B 為常數，且不同時為零。於是 $u' = 3Ae^{3x} - 2Be^{-2x}$，而

$$y = -\frac{u'}{3u} = \frac{2Be^{-2x} - 3Ae^{3x}}{3\left(Ae^{3x} + Be^{-2x}\right)}.$$

想一想 一階方程應該只有一個任意常數（arbitrary constant）。為甚麼我們會有兩個？

其實只有 A 與 B 的比才有影響：把 u 乘以一個非零常數，並不會改變 u'/u。若 $A \neq 0$，把分子和分母同時除以 Ae^{3x}，並記 $K = B/A$：

$$y = \frac{2Ke^{-5x} - 3}{3\left(1 + Ke^{-5x}\right)} = \frac{2K - 3e^{5x}}{3\left(e^{5x} + K\right)},$$

其中 K 為任意常數。$A = 0$ 的情況給出常數解 $y = \frac{2}{3}$，它是這族解當 $K \to \infty$ 時的極限。取 $K = 0$ 則得另一個常數解 $y = -1$。作為驗算，常數解滿足 $-y - 3y^2 = -2$，即 $(3y-2)(y+1) = 0$。

第 (ii) 部分

設 $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{v}$。則

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2} - \frac{v'}{v^2},$$

因此

$$\begin{aligned} x^2\frac{dy}{dx} &= -1 - \frac{x^2v'}{v^2}, \\ xy &= 1 + \frac{x}{v}, \\ x^2y^2 &= x^2\left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{xv} + \frac{1}{v^2}\right) = 1 + \frac{2x}{v} + \frac{x^2}{v^2}. \end{aligned}$$

把這三行相加，方程 $x^2y' + xy + x^2y^2 = 1$ 變成

$$1 - \frac{x^2v'}{v^2} + \frac{3x}{v} + \frac{x^2}{v^2} = 1, \qquad \text{即} \qquad -\frac{x^2v'}{v^2} + \frac{3x}{v} + \frac{x^2}{v^2} = 0.$$

兩邊乘以 v^2/x^2（其中 $x \neq 0$，這是方程本身的要求），得線性方程

$$\frac{dv}{dx} - \frac{3}{x}v = 1.$$

積分因子為 $\exp\left(-\int \frac{3}{x}\,\mathrm{d}x\right) = x^{-3}$（在 $x > 0$ 或 $x < 0$ 其中一個區間上；我們可以略去絕對值符號，因為積分因子乘以一個常數後同樣適用）。故此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{v}{x^3}\right) = \frac{1}{x^3} \quad\Longrightarrow\quad \frac{v}{x^3} = -\frac{1}{2x^2} + c \quad\Longrightarrow\quad v = cx^3 - \tfrac{1}{2}x = \frac{x\left(Kx^2 - 1\right)}{2},$$

其中 c 為任意常數，$K = 2c$。所以

$$y = \frac{1}{x} + \frac{2}{x\left(Kx^2 - 1\right)} = \frac{Kx^2 + 1}{x\left(Kx^2 - 1\right)},$$

其中 K 為任意常數。取 $K = 0$ 得 $y = -1/x$。這個代換假設了 $1/v$ 存在，所以遺漏了 $y = 1/x$ 本身（「$v = \infty$」）。它同樣是一個解，因為 $x^2\left(-\frac{1}{x^2}\right) + 1 + 1 = 1$，而且它是這族解當 $K \to \infty$ 時的極限。

驗算

- 在 (i) 中，當 $x = 0$ 時，解的值為 $y(0) = \dfrac{2K - 3}{3(1 + K)}$。當 $x \to +\infty$ 時，$y \to -1$；當 $x \to -\infty$ 時，$y \to \frac{2}{3}$（當 $K \neq 0$）。所以解由一個常數解走向另一個常數解，正如我們所料。
- 在 (ii) 中，取 $K = 1$ 及 $x = 2$：$y = \frac{5}{6}$，$y'(2) = -\frac{31}{36}$。於是 $x^2y' + xy + x^2y^2 = -\frac{31}{9} + \frac{5}{3} + \frac{25}{9} = 1$，符合要求。
- 我們以有限差分（finite differences）在數百個隨機點及隨機的 K 值上，對兩個通解（general solution）作了數值驗算。代入原方程所得的殘差，在捨入誤差範圍內為零。

常見錯誤

- 在 (i) 的答案中保留兩個常數 A、B，而沒有留意到只有它們的比才有影響。
- 在 (ii) 中忘記了 x^2y^2 交叉項的因子 2，以致把 $3v/x$ 變成 $2v/x$，得出錯誤的積分因子。
- 遺漏了代換所無法得到的解 $y = 1/x$（或 (i) 中的 $y = \frac{2}{3}$）。

STEP 之外

形如 $y' = p(x) + q(x)y + r(x)y^2$ 的方程稱為里卡蒂方程（Riccati equation）。本題的兩個技巧都是普遍適用的。代換 $y = -u'/(ru)$ 總能把里卡蒂方程化為二階線性方程。而如果你知道一個特解（particular solution）y_1，則 $y = y_1 + 1/v$ 總能給出一條關於 v 的一階線性方程。里卡蒂方程與二階線性方程之間的這種聯繫，在量子力學（quantum

mechanics）和控制理論（control theory）中會再次出現。Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（微分方程入門教科書）中有關於里卡蒂方程的習題。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。