詳細解答

STEP II 1993，第 2 題

純數學 • 三角函數與代數函數的積分

STEP II 1993，第 2 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/93-s2-q2

關鍵思路

在第 (i) 部分，餘弦的乘積不易積分，但和卻很容易，所以我們用積化和差公式（factor formula）把乘積化為和。之後一切都取決於一個事實：除非 $k = 0$，否則 $\cos kx$ 在一個完整週期（period）上的積分為零。特殊情況正正就是 $m - n$ 或 $m + n$ 為零的情況。在第 (ii) 部分，我們把平方根內的式子合併成單一分數，再進行有理化（rationalise），從而把被積函數（integrand）拆成兩個標準部分。

解答

第 (i) 部分

由積化和差公式 $2\cos A\cos B = \cos(A-B) + \cos(A+B)$ 得

$$\cos(mx)\cos(nx) = \tfrac{1}{2}[\cos((m-n)x) + \cos((m+n)x)].$$

因此我們需要對整數 k 求 $\int_0^{2\pi} \cos(kx)\,\mathrm{d}x$：

$$\int_0^{2\pi} \cos(kx)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \left[\dfrac{\sin kx}{k}\right]_0^{2\pi} = \dfrac{\sin 2k\pi}{k} = 0, & k \neq 0, \\ \displaystyle\int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}x = 2\pi, & k = 0. \end{cases}$$

這裏用到 k 是整數，所以 $\sin 2k\pi = 0$。當 $k = 0$ 時不能除以 k，因此這個情況要分開處理。

? **想一想** 共有多少個不同的情況？它們會否重疊？

$k = m - n$ 和 $k = m + n$ 各自或為零，或不為零，而兩者同時為零只會在 $m = n = 0$ 時發生。於是有三個情況：

- $m \neq n$ 且 $m \neq -n$，即 $|m| \neq |n|$：兩個積分都等於零，答案是 0。
- $m - n$、$m + n$ 之中恰好有一個為零，即 $|m| = |n| \neq 0$：其中一項貢獻 $\frac{1}{2} \cdot 2\pi$，另一項貢獻 0，所以答案是 π。
- $m = n = 0$：兩項各貢獻 $\frac{1}{2} \cdot 2\pi$。（直接來看，被積函數就是 1。）答案是 2π。

總括而言，

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & |m| \neq |n|, \\ \pi, & |m| = |n| \neq 0, \\ 2\pi, & m = n = 0. \end{cases}$$

留意 $m = -n$ 與 $m = n$ 屬於同一類，因為 cos 是偶函數（even function），$\cos(-nx) = \cos(nx)$。

第 (ii) 部分

被積函數 $\sqrt{1 + 1/x} = \sqrt{(x+1)/x}$ 只在 $(x+1)/x \geq 0$ 時才是實數，即 $x > 0$ 或 $x \leq -1$。我們先處理 $x > 0$。

$x > 0$ 的情況。 把根號內的分子和分母同乘以 $x + 1$：

$$\sqrt{\frac{x+1}{x}} = \sqrt{\frac{(x+1)^2}{x(x+1)}} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}},$$

其中利用了 $x + 1 > 0$ 來取 $(x+1)^2$ 的平方根。現在把分子拆開，使其中一部分是 $x^2 + x$ 的導數的一半：

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+x}}.$$

? **想一想** 怎樣對 $1/\sqrt{x^2+x}$ 積分？

我們用配方法（completing the square）：$x^2 + x = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$。然後標準結果 $\int (u^2 - a^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}u = \ln\left(u + \sqrt{u^2 - a^2}\right)$（在 $u > a > 0$ 時成立）可以應用，取 $u = x + \frac{1}{2}$ 和 $a = \frac{1}{2}$：

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+x}} = \ln\left(x + \tfrac{1}{2} + \sqrt{x^2+x}\right) + \text{常數} = \ln\left(2x + 1 + 2\sqrt{x^2+x}\right) + \text{常數}.$$

第一部分是 $\int \frac{1}{2}(2x+1)(x^2+x)^{-1/2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{x^2+x}$。所以，當 $x > 0$ 時，

$$\int \sqrt{1 + \frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{x^2+x} + \frac{1}{2}\ln\left(2x + 1 + 2\sqrt{x^2+x}\right) + C.$$

由於 $2x+1+2\sqrt{x^2+x} = \left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)^2$，這也可以寫成

$$\sqrt{x(x+1)} + \ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right) + C.$$

用代換（substitution）$x = \sinh^2 t$ 可以直接得出這第二個形式。被積函數變成 $2\cosh^2 t = 1+\cosh 2t$，其積分為 $t + \sinh t \cosh t$。

$x \le -1$ 的情況。 這時 $x+1 \le 0$，所以 $\sqrt{(x+1)^2} = -(x+1)$，而

$$\sqrt{\frac{x+1}{x}} = -\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}}.$$

同樣的拆法仍然適用，但現在 $x+\frac{1}{2} < 0$，所以我們需要 $\int (u^2-a^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}u = \ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right|$，此式在 $|u| > a$ 時成立。當 $x < -1$ 時，

$$\int \sqrt{1+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x = -\sqrt{x^2+x} - \frac{1}{2}\ln\left|2x+1+2\sqrt{x^2+x}\right| + C.$$

因為 $\left(2x+1+2\sqrt{x^2+x}\right)\left(2x+1-2\sqrt{x^2+x}\right) = 1$，這個對數項也可以寫成 $+\frac{1}{2}\ln\left|2x+1-2\sqrt{x^2+x}\right|$。

驗算

- 第 (i) 部分：取 $m = n = 1$，被積函數是 $\cos^2 x$，其平均值為 $\frac{1}{2}$，所以積分是 $\frac{1}{2}\cdot 2\pi = \pi$，與預期相符。對每一對 $-6 \le m, n \le 6$ 用數值方法（辛普森法則，Simpson's rule）計算，結果都與三個情況的公式吻合。
- 第 (ii) 部分：對答案求導。$\sqrt{x^2+x}$ 的導數是 $\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$。$\frac{1}{2}\ln(\cdots)$ 的導數是 $\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+x}}$。兩者相加得 $\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+x}}$，正如所求。
- 數值上，$\int_1^3 \sqrt{1+1/x}\,\mathrm{d}x \approx 2.48547$，用辛普森法則和用公式 $\sqrt{12} - \sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln\dfrac{7+4\sqrt{3}}{3+2\sqrt{2}}$ 計算，結果一致。

常見錯誤

- 忘記 $m = -n \neq 0$ 的情況；它與 $m = n \neq 0$ 一樣，答案是 π。
- 在 $k = 0$ 時寫出 $\dfrac{\sin kx}{k}$；這個情況需要另行處理。
- 沒有檢查正負號就寫 $\sqrt{(x+1)^2} = x+1$，這會令 $x < -1$ 時的答案出錯。

STEP 之外

第 (i) 部分說明函數 $1, \cos x, \cos 2x, \ldots$ 在 $[0, 2\pi]$ 上是正交（orthogonal）的。這正是傅立葉級數（Fourier series）背後的事實：若 $f(x) = \sum a_n \cos nx$，乘以 $\cos mx$ 再積分，就能抽出單獨一個係數 a_m。同樣的想法，即以積分扮演點積（dot product）的角色，是函數空間上許多線性代數（linear algebra）內容的基礎。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門）講解正交性，而 Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（初等微分方程）則展示了傅立葉級數如何實際用於求解熱方程（heat equation）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。