詳細解答

STEP II 1993，第 14 題

力學 • 反彈與恢復係數

> **STEP II 1993，第 14 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/93-s2-q14

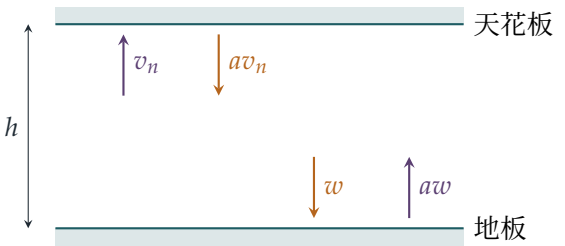
關鍵思路

在兩次碰撞之間，球只受重力作用而自由運動，因此 $v^2 = u^2 \pm 2gh$ 把它在地板和天花板處的速率聯繫起來，而每次碰撞都把速率乘以 a。追蹤一個完整循環（天花板、地板、再回到天花板），便得到球在天花板處的動能（kinetic energy）所滿足的線性遞推關係（linear recurrence），我們把它平移到不動點（fixed point）來求解。球能第 n 次到達天花板，當且僅當該能量為正數，再取對數便得出所求的上界。

解答

我們把球視為沿鉛垂方向運動的質點，不計空氣阻力，並取 $0 < a < 1$（上界的分母含有 $\ln a$，而且若 $a = 1$，球會永遠不停地撞擊天花板）。設 v_n 為球第 n 次撞擊天花板前一刻的速率，並設

$$E_n = \frac{v_n^2}{2gh}, \qquad \text{於是} \qquad \tfrac{1}{2}mv_n^2 = mgh\,E_n.$$



第一次撞擊天花板

球離開地板時 $u^2 = 2kgh$，並克服重力上升高度 h，所以

$$v_1^2 = 2kgh - 2gh = 2gh(k-1), \qquad E_1 = k - 1 > 0,$$

由於 $k > 1$，這是正數；因此球必定至少到達天花板一次。

一個完整循環

第 n 次撞擊天花板後的一刻，球以速率 av_n 向下運動（對固定的天花板應用牛頓實驗定律（Newton's experimental law））。它下落高度 h，因此以速率 w 到達地板，其中

$$w^2 = a^2 v_n^2 + 2gh.$$

它以速率 aw 向上反彈，並上升高度 h。若它能回到天花板，它在該處的速率滿足

$$v_{n+1}^2 = a^2 w^2 - 2gh = a^4 v_n^2 + 2gh\,(a^2 - 1).$$

除以 $2gh$，得

$$E_{n+1} = a^4 E_n + (a^2 - 1).$$

只要右邊為正數，此式便成立；若右邊為零或負數，球便再也回不到天花板。

> **想一想** 形如 $E_{n+1} = a^4 E_n + c$ 的遞推關係應怎樣求解？

先找出滿足 $E = a^4 E + (a^2 - 1)$ 的常數解 E：

$$E = \frac{a^2 - 1}{1 - a^4} = \frac{a^2 - 1}{(1 - a^2)(1 + a^2)} = -\frac{1}{1 + a^2}.$$

減去這個不動點便可消去常數項：設 $F_n = E_n + \dfrac{1}{1 + a^2}$，則 $F_{n+1} = a^4 F_n$。因此 $F_n = a^{4(n-1)} F_1$，而由於 $F_1 = (k-1) + \dfrac{1}{1 + a^2}$，

$$E_n = a^{4n-4}\left(k - 1 + \frac{1}{a^2 + 1}\right) - \frac{1}{a^2 + 1} = a^{4n-4}(k-1) + \frac{a^{4n-4} - 1}{a^2 + 1}.$$

乘以 mgh，可知第 n 次撞擊天花板前一刻的動能為

$$mgh\left(a^{4n-4}(k-1) + \frac{a^{4n-4} - 1}{a^2 + 1}\right),$$

正如所求。

撞擊天花板的次數

球只有在到達天花板時速率為正，才會第 n 次撞擊天花板，即必須有 $E_n > 0$。（若球第 n 次撞擊天花板，則之前每一次它也都撞擊了天花板，所以上面的公式適用。）把 $E_n > 0$ 乘以 $a^2 + 1 > 0$，

$$a^{4n-4}((k-1)(a^2+1)+1) > 1 \quad \Longleftrightarrow \quad a^{4n-4}(a^2(k-1)+k) > 1.$$

兩邊皆為正數，所以可以取對數：

$$(4n-4)\ln a + \ln[a^2(k-1)+k] > 0.$$

> **想一想** 除以 $4\ln a$ 時，不等號的方向應怎樣？

由於 $0 < a < 1$，我們有 $\ln a < 0$，所以除以 $4\ln a$ 時不等號要反轉：

$$n - 1 < -\frac{\ln[a^2(k-1)+k]}{4\ln a}, \qquad \text{即} \qquad n < 1 - \frac{\ln[a^2(k-1)+k]}{4\ln a}.$$

因此，若球撞擊天花板 N 次，則不等式在 $n = N$ 時成立，於是

$$N < 1 - \frac{\ln[a^2(k-1)+k]}{4\ln a}.$$

特別地，撞擊天花板的次數不會超過這個值，這正是我們要證明的。（事實上 E_n 隨 n 遞減，所以 N 恰好等於嚴格小於該上界的正整數的個數。）

驗算

- $n = 1$：公式給出 $mgh(k-1)$，與由能量守恆（energy conservation）得出的 $\frac{1}{2}m(2kgh) - mgh$ 吻合。
- n 很大時：$E_n \to -\frac{1}{1+a^2} < 0$，所以球最終確實無法再到達天花板；既然每次碰撞都損失能量，結果必然如此。
- 數值驗算：取 $k = 6$、$a = 0.9$、$h = 2\,\text{m}$、$m = 1\,\text{kg}$ 及 $g = 9.8\,\text{m s}^{-2}$，逐步模擬得出在天花板處的動能依次為 98、60.57、36.02 J，與公式相符。球撞擊天花板 6 次，而上界約為 6.48。

常見錯誤

- 忘記速率在天花板和地板兩處都要乘以 a，結果每個循環得出 a^2 而非 a^4。
- 除以 $\ln a$ 時沒有把不等號反轉。
- 把恢復系數（restitution）用在動能而非速率上：每次碰撞時能量是乘以 a^2，而不是乘以 a。

STEP 之外

遞推關係 $E_{n+1} = a^4 E_n + c$ 是一階線性差分方程（first-order linear difference equation）。減去不動點這個技巧，正是為線性常微分方程（ODE）求特別積分（particular integral）的離散版本，它在迭代映射（iterated maps）及其穩定性的研究中會再次出現。Kleppner 與 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教材）對碰撞和能量損失有更一般的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。