詳細解答

STEP II 1993，第 13 題

力學 • 簡諧運動

> **STEP II 1993，第 13 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/93-s2-q13

關鍵思路

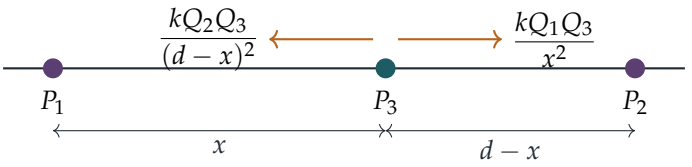
為運動中的小珠設定坐標，寫出它所受的淨力（net force）：兩個方向相反的平方反比（inverse-square）斥力。兩力互相抵銷之處就是平衡位置（equilibrium position）。至於振動，令小珠偏離平衡位置一個微小的 y，對兩個力都使用題目給出的近似式，常數項便會因平衡條件而互相抵銷，只剩下一個與 y 成正比的回復力（restoring force）。這正是簡諧運動（simple harmonic motion）的方程。

（題目說 P_3 在「P_1 與 P_3 之間」移動；這是試卷的筆誤，應為「P_1 與 P_2 之間」。）

解答

模型。各小珠均視為質點（particle）；金屬線光滑且水平，所以 P_3 的重量與法向反作用力（normal reaction）都垂直於金屬線，對沿線的運動毫無影響。沿金屬線方向的力，就只有作用於 P_3 的兩個電斥力（固定的小珠已被固定在原位，所以毋須理會它們所受的力）。

由 P_1 起向 P_2 方向量度 x，於是 P_3 與 P_1 的距離為 x，與 P_2 的距離為 $d-x$，其中 $0 < x < d$。



P_1 把 P_3 推向 P_2（正方向），而 P_2 則把它推回去，所以沿金屬線應用牛頓第二定律（New-

ton's second law），得

$$m\ddot{x} = \frac{kQ_1Q_3}{x^2} - \frac{kQ_2Q_3}{(d-x)^2}. \qquad (*)$$

平衡位置

在平衡位置 $x = a$，$(*)$ 的右邊等於零。由於 k 和 Q_3 均為正數，可以兩邊除以 kQ_3：

$$\frac{Q_1}{a^2} = \frac{Q_2}{(d-a)^2} \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{d-a}{a}\right)^2 = \frac{Q_2}{Q_1}.$$

a 和 $d-a$ 都是正數（小珠位於兩顆固定小珠之間），所以取正平方根：

$$\frac{d-a}{a} = \frac{\sqrt{Q_2}}{\sqrt{Q_1}} \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{Q_1}\,(d-a) = \sqrt{Q_2}\,a \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{d\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1}+\sqrt{Q_2}},$$

這正是所要求的結果。為方便起見，記 $S = \sqrt{Q_1} + \sqrt{Q_2}$ 及 $b = d - a$，於是

$$a = \frac{d\sqrt{Q_1}}{S}, \qquad b = \frac{d\sqrt{Q_2}}{S}.$$

留意小珠停在較接近較弱電荷的一邊，這是合理的。

微小振動

設 $x = a + y$，其中 y 很小，於是 $d - x = b - y$ 而 $\ddot{x} = \ddot{y}$。利用題目給出的近似式（以及把 y 換成 $-y$、a 換成 b 後的同一近似式），

$$\frac{1}{(a+y)^2} \approx \frac{1}{a^2} - \frac{2y}{a^3}, \qquad \frac{1}{(b-y)^2} \approx \frac{1}{b^2} + \frac{2y}{b^3}.$$

代入 $(*)$：

$$\begin{aligned} m\ddot{y} &\approx kQ_3\left[Q_1\left(\frac{1}{a^2} - \frac{2y}{a^3}\right) - Q_2\left(\frac{1}{b^2} + \frac{2y}{b^3}\right)\right] \\ &= kQ_3\left(\frac{Q_1}{a^2} - \frac{Q_2}{b^2}\right) - 2kQ_3\left(\frac{Q_1}{a^3} + \frac{Q_2}{b^3}\right)y. \end{aligned}$$

想一想 不含 y 的各項會怎樣？

它們正好就是平衡條件，所以 $\frac{Q_1}{a^2} - \frac{Q_2}{b^2} = 0$，這些項互相抵銷。在平衡位置附近展開時，這種情況必然出現：按定義，零階的力就是零。

現在利用 a 和 b 的表達式化簡 y 的係數：

$$\frac{Q_1}{a^3} = \frac{Q_1 S^3}{d^3 Q_1^{3/2}} = \frac{S^3}{d^3\sqrt{Q_1}}, \qquad \frac{Q_2}{b^3} = \frac{S^3}{d^3\sqrt{Q_2}},$$

所以

$$\frac{Q_1}{a^3}+\frac{Q_2}{b^3}=\frac{S^3}{d^3}\cdot\frac{\sqrt{Q_2}+\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1Q_2}}=\frac{S^4}{d^3\sqrt{Q_1Q_2}}.$$

因此

$$\ddot{y}\approx-\omega^2 y,\qquad \omega^2=\frac{2kQ_3S^4}{md^3\sqrt{Q_1Q_2}}>0.$$

這就是簡諧運動的方程，所以在位移很小時，P_3 圍繞 $x=a$ 作近似的簡諧運動。（若在 $y=y_0$ 處由靜止釋放，其運動為 $y\approx y_0\cos\omega t$。）週期（period）為

$$\begin{aligned}T&=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{md^3\sqrt{Q_1Q_2}}{2kQ_3S^4}}=\frac{2\pi d}{S^2}\sqrt{\frac{md\sqrt{Q_1Q_2}}{2kQ_3}}\\&=\frac{\pi d}{S^2}\sqrt{\frac{4md\sqrt{Q_1Q_2}}{2kQ_3}}=\frac{\pi d}{(\sqrt{Q_1}+\sqrt{Q_2})^2}\sqrt{\frac{2md\sqrt{Q_1Q_2}}{kQ_3}},\end{aligned}$$

這就是所要求的結果。

驗算

- **對稱性：**當 $Q_1=Q_2$ 時，得 $a=d/2$，即中點，理應如此。週期公式對 Q_1 和 Q_2 是對稱的，這也是應有的性質（對調兩個電荷只是把整幅圖反射過來）。
- **量綱（dimensions）：**kQQ'/r^2 是力，所以 $kQ_3\sqrt{Q_1Q_2}$ 的量綱是力 $\times$ 長度^2。於是 $md\sqrt{Q_1Q_2}/(kQ_3)\cdot d^2/(\sqrt{Q_1}+\sqrt{Q_2})^4$ 的量綱為 質量 $\times$ 長度/力 $=$ 時間^2。沒有問題。
- **數值：**取 $Q_1=4$、$Q_2=1$、$d=3$ 及 $k=Q_3=m=1$，得 $a=2$（驗證：$4/2^2=1/1^2$）及 $T=2\pi/\sqrt{3}\approx 3.628$。對多組隨機選取的常數，由一個極小的位移出發以數值方法對 $(*)$ 積分，所得週期與公式吻合，誤差小於 10^4 分之一。

常見錯誤

- 只展開兩個力的其中一個：兩個力都取決於 y，而且兩者都對回復力有貢獻（符號相同）。
- 弄錯 $1/(b-y)^2$ 中 y 項的符號：在題目給出的近似式中把 y 換成 $-y$，得到的是 $+2y/b^3$。
- 在平衡條件中取負平方根，這樣小珠便會落在線段 P_1P_2 之外。

STEP 之外

我們所做的就是線性化（linearisation）：在勢能（potential）$V(x)$ 的穩定平衡點附近，運動近似為簡諧運動，其中 $\omega^2 = V''(a)/m$。這裏 $V = kQ_3\big(Q_1/x + Q_2/(d-x)\big)$，你可以驗證 $V''(a)$ 給出相同的 ω^2。把這個想法推廣到多個坐標，就會引出振動的簡正模式（normal modes），那是大學一年級動力學的核心課題。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）對平衡點附近的微小振動有清晰的講解。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。