詳細解答

STEP II 1993，第 12 題

力學 • 摩擦力與剛體

STEP II 1993，第 12 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/93-s2-q12

關鍵思路

球體被卡在牆與斜面之間，所以它一旦移開，就必定與其中一方失去接觸。如果它在兩個接觸點同時滑動，球心便保持不動，球體只是繞着球心自轉。弄清楚它會向哪個方向轉動，就知道每個摩擦力（friction）的方向。之後只需處理三條方程（兩條分解力的方程和一條力矩方程），未知數為 N_1、N_2 和 m。至於第二部分，只要選對取力矩的點，一行就能得出答案。

解答

模型與摩擦力的方向

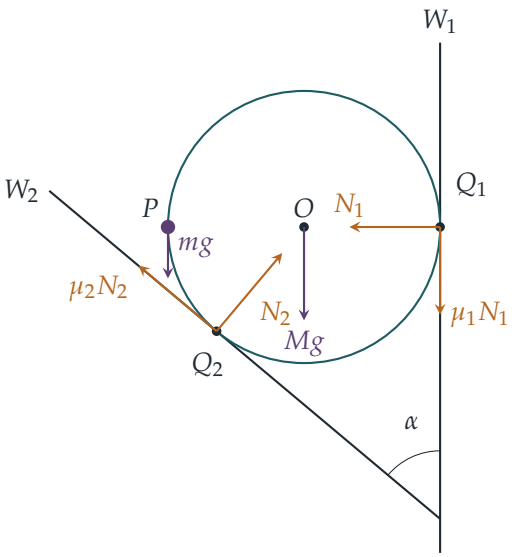
我們把球體視為均勻的剛體（rigid body）球，把質點（particle）視為固定在 P 的點質量。Q_1 和 Q_2 兩處的接觸面都是粗糙的。設法向反作用力（normal reaction）為 N_1（水平，指離牆壁）和 N_2（垂直於斜面，通過球心 O）。

由於 PQ_1 是水平直徑，質點位於與 O 水平距離為 r 之處，在遠離牆壁的一側。因此它的重量對 O 的力矩（moment）為 mgr，使球體朝 P 下降的方向轉動，而接觸點上的力必須與之平衡。

? **想一想** 每個接觸點上的摩擦力朝哪個方向？

如果球體在兩點都滑動，它仍與兩個面保持接觸，所以 O 固定不動，球體繞 O 朝 P 下降的方向轉動。於是與 P 相對的點 Q_1 沿牆壁向上移動，而 Q_2 則沿斜面向下移向牆角。摩擦力阻礙滑動，所以在 Q_1 處沿牆壁向下，在 Q_2 處沿斜面向上。由於兩點都即將滑動，兩處的摩擦力都達到極限（limiting）：$F_1 = \mu_1 N_1$ 和 $F_2 = \mu_2 N_2$。兩個摩擦力對 O

的力矩都與質點的力矩相反，這正是應有的情況。



兩個接觸點同時滑動

斜面與鉛垂線成角 α，所以它的法線與水平線成角 α。於是 N_2 的分量為指向牆壁的 $N_2\cos\alpha$ 和向上的 $N_2\sin\alpha$，而沿斜面向上的摩擦力 $\mu_2 N_2$ 的分量為指離牆壁的 $\mu_2 N_2\sin\alpha$ 和向上的 $\mu_2 N_2\cos\alpha$。

沿水平方向分解：

$$N_1 = N_2\cos\alpha - \mu_2 N_2\sin\alpha = N_2(\cos\alpha - \mu_2\sin\alpha). \tag{1}$$

沿鉛垂方向分解：

$$N_2\sin\alpha + \mu_2 N_2\cos\alpha - \mu_1 N_1 = (M+m)g. \tag{2}$$

對 O 取力矩：兩個法向反作用力都通過 O，Mg 也是。兩個摩擦力沿切線作用，與 O 的距離為 r。所以

$$mgr = \mu_1 N_1 r + \mu_2 N_2 r \quad\Longrightarrow\quad mg = \mu_1 N_1 + \mu_2 N_2. \tag{3}$$

把 (1) 代入 (3) 和 (2)：

$$mg = N_2(\mu_2 + \mu_1\cos\alpha - \mu_1\mu_2\sin\alpha),$$
$$(M+m)g = N_2(\sin\alpha + \mu_2\cos\alpha - \mu_1\cos\alpha + \mu_1\mu_2\sin\alpha).$$

從第二式減去第一式，得

$$\begin{aligned} Mg &= N_2(\sin\alpha + \mu_2\cos\alpha - 2\mu_1\cos\alpha + 2\mu_1\mu_2\sin\alpha - \mu_2) \\ &= N_2((2\mu_1\mu_2+1)\sin\alpha + (\mu_2 - 2\mu_1)\cos\alpha - \mu_2). \end{aligned}$$

把 mg 的方程除以這條方程，N_2 和 g 便會約去：

$$m = \frac{\mu_2 + \mu_1\cos\alpha - \mu_1\mu_2\sin\alpha}{(2\mu_1\mu_2+1)\sin\alpha + (\mu_2 - 2\mu_1)\cos\alpha - \mu_2}\,M,$$

這正是所要求的結果。

要令這個結果在物理上有意義，我們需要 $N_1 > 0$，由 (1) 可知這即是 $\mu_2 < \cot\alpha$。如果 μ_2 比這個值大，Q_2 處的摩擦力會把球體拉離牆壁，那就是最後一部分的情況。

繞 Q_2 滾動

現在球體在 Q_2 處不滑動，而是即將繞 Q_2 轉動（沿斜面向上滾動），所以球心會遠離牆壁，Q_1 處的接觸即將消失。在即將滾動的一刻，$N_1 = 0$，因此 Q_1 處的摩擦力也是零。

> ? **想一想** Q_2 處的摩擦力現在是未知的，我們該怎樣處理？

我們對 Q_2 取力矩，這樣 Q_2 處的反作用力和摩擦力都會消失，只剩下兩個重量。從 Q_2 起量度水平距離。由於 OQ_2 垂直於斜面，它與水平線成角 α，所以 O 與 Q_2 的水平距離為 $r\cos\alpha$，在靠牆的一側。質點在 O 之外再遠 r，朝遠離牆壁的方向，所以它與 Q_2 的水平距離為 $r - r\cos\alpha$，在另一側。要令力矩平衡，

$$Mg\,r\cos\alpha = mg\,r(1-\cos\alpha) \quad\Longrightarrow\quad m = \frac{M\cos\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{M}{\sec\alpha - 1},$$

其中最後一步是把分子和分母同除以 $\cos\alpha$。這就是所求的結果。

驗算

- 在兩種情況的分界上，即 $N_1 = 0$，亦即 $\mu_2 = \cot\alpha$ 時，兩個答案應該一致。把 $\mu_2 = \cos\alpha/\sin\alpha$ 代入第一條公式，不論 μ_1 是甚麼，分子都變成 $\cot\alpha$，分母都變成 $(1-\cos\alpha)/\sin\alpha$。所以 $m = M\cos\alpha/(1-\cos\alpha)$，與第二個答案吻合。
- 當 $\alpha = 60°$ 時，第二個答案給出 $m = M$。當 $\alpha = 60°$、$\mu_1 = 0.2$、$\mu_2 = 0.3$ 和 $M = 1$ 時，第一個答案給出 $m \approx 0.561$。我們用電腦就這些數值以及 2000 個隨機個案，檢查過力和力矩的平衡。
- 如果兩個接觸面都是光滑的（$\mu_1 = \mu_2 = 0$），第一條公式給出 $m = 0$：沒有任何東西能抵抗質點的力矩，一如所料。

常見錯誤

- 弄錯摩擦力的方向。先判斷球體會怎樣轉動，再判斷每個接觸點會向哪個方向滑動。

- 忘記兩個反作用力都通過球心，所以它們不會出現在對 O 的力矩方程中。
- 在最後一部分仍保留牆壁的摩擦力。球體一旦即將離開牆壁，$N_1 = 0$，所以該處的摩擦力是零。

STEP 之外

這類題目涉及多個可能滑動或滾動的接觸點，是帶約束（constraints）的剛體力學的起點。每個接觸點都給出一組不等式（$|F| \leq \mu N$、$N \geq 0$），而你要找出其中哪些是以等式成立的。同樣的分情況討論也出現在機械人學（robotics）中，用來判斷機械手能否抓穩物件。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）對靜力學（statics）和剛體的轉動有細緻的講解。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。