詳細解答

STEP II 1993，第 11 題

力學 • 有二次阻力的運動

STEP II 1993，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

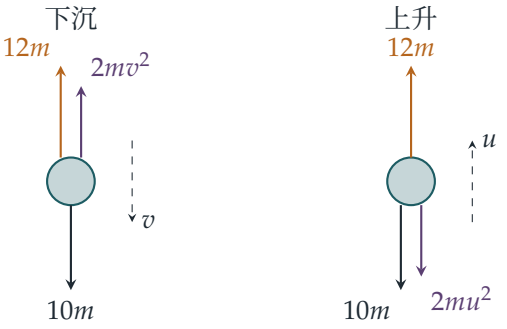
step.maths.org/questions/93-s2-q11

關鍵思路

物體一旦進入液體，浮力（buoyancy）便大於重力，因此除了與 v^2 成正比的阻力（resistance）之外，還有一個恆定的向上淨力。阻力永遠與運動方向相反，所以物體掉頭時阻力的方向亦隨之反轉，下沉和上升兩個階段須各自列出運動方程（equation of motion）。兩條方程都可以乾淨利落地分離變數。求時間時用 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$，求距離時用 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$。

解答

我們把物體模擬為一個質點（particle）。在液體中，物體的重量為 $10m$ N，方向向下，而浮力為 $\frac{6}{5} \times 10m = 12m$ N，方向向上，故兩者合起來是 $2m$ N 的淨力，方向向上，不論物體向哪個方向運動都是如此。阻力 $2mv^2$ N 的方向則與速度相反。



下沉階段

取向下為正，設 x 為液面以下的深度，v 為向下的速率。由牛頓第二定律（Newton's second law）得

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 10m - 12m - 2mv^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -2(1+v^2).$$

設物體以速率 $V > 0$ 進入液體。分離變數（separating the variables），並由入水一刻（$t = 0$，$v = V$）積分至停止下沉的一刻（$t = T_1$，$v = 0$）：

$$\int_V^0 \frac{\mathrm{d}v}{1+v^2} = -2\int_0^{T_1} \mathrm{d}t \qquad \Longrightarrow \qquad T_1 = \tfrac{1}{2}\arctan V.$$

由於對任何有限的 V 都有 $\arctan V < \frac{\pi}{2}$，故 $T_1 < \frac{1}{4}\pi$：無論物體入水時有多快，它都會在入水後不足 $\frac{1}{4}\pi$ 秒內停止下沉。（此外，整個過程中 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \le -2$，所以它必定會停下來。）

$V = 1$ 時到達的深度

此時 $T_1 = \frac{1}{2}\arctan 1 = \frac{\pi}{8}$。要求深度，可把加速度寫成 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$：

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -2(1+v^2) \qquad \Longrightarrow \qquad \int_1^0 \frac{v\,\mathrm{d}v}{1+v^2} = -2\int_0^D \mathrm{d}x,$$

所以 $-\frac{1}{2}\ln 2 = -2D$，最大深度為

$$D = \tfrac{1}{4}\ln 2 \text{ 米},$$

正如題目所求。

上升階段

在深度 D 處，物體瞬時靜止，但 $2m$ N 的向上淨力依然存在，所以物體開始上升。這時阻力的方向向下。取向上為正，設 y 為由最低點起計上升的高度，u 為向上的速率：

$$m\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 12m - 10m - 2mu^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 2(1-u^2).$$

想一想 為甚麼不能沿用下沉階段的方程，只讓 v 變成負數？

不論 v 的正負，$-2mv^2$ 這一項永遠指向上方。物體一旦上升，阻力必須指向下方，所以方程也要改變。（若要用單一條方程，便須寫成 $-2mv|v|$。）還要留意，整個上升過程中 $u < 1$：u 由 0 開始，而只有當 $u < 1$ 時才有 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} > 0$，所以 u 只能趨近終端速率（terminal speed）1 ms^{-1}。這保證了下文的 $1-u^2$ 為正數。

回到液面時的速率。利用 $u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = 2(1-u^2)$，由 $y = 0$，$u = 0$ 積分至 $y = D$，$u = U$：

$$\int_0^U \frac{u\,\mathrm{d}u}{1-u^2} = 2\int_0^D \mathrm{d}y \qquad \Longrightarrow \qquad -\tfrac{1}{2}\ln(1-U^2) = 2D = \tfrac{1}{2}\ln 2.$$

所以 $1-U^2=\frac{1}{2}$，物體回到液面時的速率為 $U=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{ms}^{-1}$。

上升所需時間。利用 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=2(1-u^2)$，並以部分分式（partial fractions）$\dfrac{1}{1-u^2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1+u}+\dfrac{1}{1-u}\right)$ 處理：

$$T_2=\frac{1}{2}\int_0^U\frac{\mathrm{d}u}{1-u^2}=\frac{1}{4}\left[\ln\frac{1+u}{1-u}\right]_0^U=\frac{1}{4}\ln\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1},$$

最後一步是把分子和分母同乘以 $\sqrt{2}$。

總時間。物體在進入水池後

$$T_1+T_2=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)\text{ 秒}$$

再次到達液面，正如題目所求。

驗算

- 由於 $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=(\sqrt{2}+1)^2$，上升時間為 $T_2=\frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})\approx 0.4407\,\mathrm{s}$，總時間 $\approx 0.3927+0.4407=0.8334\,\mathrm{s}$。
- 以數值方法逐步計算這個運動（龍格－庫塔法（Runge–Kutta），阻力寫成 $-2v|v|$），得出停止下沉的時間為 $0.39270\,\mathrm{s}$，深度為 $0.17329\,\mathrm{m}=\frac{1}{4}\ln 2$，回到液面的速率為 $0.70711\ \mathrm{ms}^{-1}$，回到液面的時間為 $0.83339\,\mathrm{s}$，全部吻合。
- 回到液面的速率小於入水速率，這是必然的：阻力在來回兩段路程上都作負功。

常見錯誤

- 物體回升時仍把阻力當作向上，這樣會得出 $2m+2mu^2$ 的向上淨力，上升也會快得多。
- 忘記浮力大於重力，以致把淨力（以向下為正）寫成 $+2m$，而非 $-2m$。
- 求深度時用 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$，或求時間時用 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$，結果卡在積分上。

STEP 之外

二次阻力（quadratic drag）令運動方程變成非線性，但方程仍然是可分離變數的，這就是為何下沉時出現 arctan，而上升時出現 $\tanh^{-1}$（事實上 $T_2=\frac{1}{2}\tanh^{-1}U$）。上升時物

體趨近 1 ms^{-1} 的終端速率，此時阻力與向上淨力互相平衡。大學一年級的課程會有系統地處理這類模型，包括像 $\dot{u} = 2(1 - u^2)$ 這類方程的相線（phase line）圖像。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）討論取決於速度的力，而 Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（初等微分方程）則討論可分離變數方程及自治方程（autonomous equations）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。