詳細解答

STEP II 1993，第 10 題

純數學 • 二次型與圓錐曲線

STEP II 1993，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/93-s2-q10

關鍵思路

一條關於 x 和 y 的二次方程之所以繁複，原因有二：一是 xy 交叉項（cross term），二是一次項。矩陣 $\mathbf{P}$ 處理前者，因為 $\mathbf{PAP}$ 是對角矩陣（diagonal matrix）。平移向量 $\mathbf{a}$ 處理後者：我們選取它，把原點移到圓錐曲線（conic）的中心，使所有關於 $\mathbf{x}_1$ 的一次項互相抵消。餘下的就是純粹的「平方和 = 常數」。

解答

對角化

首先，

$$\mathbf{AP} = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 8 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -10 \\ 30 & 5 \end{pmatrix},$$

所以

$$\mathbf{PAP} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 & -10 \\ 30 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75 & 0 \\ 0 & -25 \end{pmatrix},$$

這是對角矩陣，正如所求。另外留意 $\mathbf{P}$ 是對稱（symmetric）矩陣，所以 $\mathbf{P}^{\mathrm{T}} = \mathbf{P}$。這一點稍後便會用到。

代入

設 $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}$。則 $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} = \mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{P} + \mathbf{a}^{\mathrm{T}}$，而且

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{a} + \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{a} \\ &= \mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{x}_1 + 2\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{a}.\end{aligned}$$

中間兩項相等，因為它們各自都是 1×1 矩陣，所以等於自身的轉置（transpose），而 $(\mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{a})^{\mathrm{T}} = \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_1 = \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{x}_1$，這裏用到 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{P}$ 都是對稱矩陣。此外 $\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{x}_1 + \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{a}$。於是方程變成

$$\mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{x}_1 + (2\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} + \mathbf{b}^{\mathrm{T}})\mathbf{P}\mathbf{x}_1 + (\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{a} + \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{a} - 11) = 0.$$

想一想 「一個合適的向量 $\mathbf{a}$」需要做到甚麼？

目標方程 $3x_1^2 - y_1^2 = c$ 沒有只含 x_1 或 y_1 的一次項，所以中間的括號必須為零。由於 $\mathbf{A}$ 是對稱矩陣，$2\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} + \mathbf{b}^{\mathrm{T}} = (2\mathbf{A}\mathbf{a} + \mathbf{b})^{\mathrm{T}}$，所以我們需要

$$\mathbf{A}\mathbf{a} = -\tfrac{1}{2}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -9 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

這裏 $\det \mathbf{A} = -11 - 64 = -75 \neq 0$，所以恰好有一個解：

$$\mathbf{a} = -\frac{1}{75}\begin{pmatrix} 11 & -8 \\ -8 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -9 \\ -3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{75}\begin{pmatrix} -75 \\ 75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

（驗算：$\mathbf{A}\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -1 - 8 \\ 8 - 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -3 \end{pmatrix}$。）

常數項

取這個 $\mathbf{a}$，便有 $\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{a} = \mathbf{a}^{\mathrm{T}}(-\tfrac{1}{2}\mathbf{b}) = -\tfrac{1}{2}\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{a}$，所以常數項是

$$\tfrac{1}{2}\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{a} - 11 = \tfrac{1}{2}(18 - 6) - 11 = -5.$$

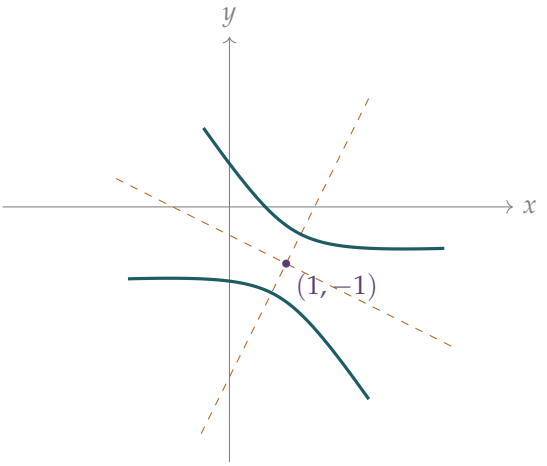
二次項是

$$\mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} 75 & 0 \\ 0 & -25 \end{pmatrix}\mathbf{x}_1 = 75x_1^2 - 25y_1^2.$$

所以方程變成 $75x_1^2 - 25y_1^2 - 5 = 0$。兩邊除以 25，得

$$3x_1^2 - y_1^2 = \tfrac{1}{5}, \qquad \text{所以} c = \tfrac{1}{5}.$$

把代換逐項寫出來，就是 $x = x_1 + 2y_1 + 1$，$y = 2x_1 - y_1 - 1$。原方程是 $-x^2 + 16xy + 11y^2 + 18x + 6y - 11 = 0$，所以這條曲線是一條雙曲線（hyperbola），中心在 $(1, -1)$。$\mathbf{P}$ 的兩個列向量 $(1, 2)$ 和 $(2, -1)$ 互相垂直，所以它們給出雙曲線的對稱軸。



虛線是對稱軸，方向分別為 $(1,2)$ 和 $(2,-1)$。

想一想 為甚麼 **P** 不是旋轉（rotation）？

它的兩個列向量互相垂直，但長度各為 $\sqrt{5}$，所以 $\mathbf{P}^2 = 5\mathbf{I}$，而不是 $\mathbf{I}$。這就是 **PAP** 的對角元素是 75 和 -25 的原因：它們是 **A** 的特徵值（eigenvalue）15 和 -5 的 5 倍。這個比例因子在這裏無關重要，因為它只是把二次部分乘以 5。

驗算

- **A** 的跡（trace）和行列式（determinant）分別是 10 和 -75，所以它的特徵值是 15 和 -5。這與 $75/5$ 和 $-25/5$ 吻合。
- 取 $x_1 = y_1 = 0$。則 $(x,y) = (1,-1)$，原方程左方為 $-1-16+11+18-6-11 = -5$，與 $75x_1^2 - 25y_1^2 - 5$ 一致。
- 取 $x_1 = 1$，$y_1 = 1$。則 $(x,y) = (4,0)$，而 $-16+72-11 = 45 = 75-25-5$。

我們亦在 1000 個隨機有理點上，精確地驗證了恆等式 左方 $= 25\left(3x_1^2 - y_1^2 - \frac{1}{5}\right)$。

常見錯誤

- 忘記交叉項 $\mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{x}_1$ 相等，因而漏掉因子 2，得出 $\mathbf{A}\mathbf{a} = -\mathbf{b}$。
- 停在 $75x_1^2 - 25y_1^2 = 5$ 便答 $c = 5$，沒有把全式除到題目要求的形式。

STEP 之外

這是主軸定理（principal axes theorem）的縮影。每個實對稱矩陣都可以用一個正交矩陣（orthogonal matrix）對角化（這裏是 $\mathbf{P}/\sqrt{5}$）。所以每條圓錐曲線，以及三維空間中的每個二次曲面（quadric surface），都可以透過一次旋轉（或反射）和一次平移化為標準形式。同樣的想法亦可藉黑塞矩陣（Hessian matrix）為多元函數的駐點（stationary point）分類。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門教科書）有一章講對稱矩陣和正定性（positive definiteness），寫得很好。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。