詳細解答

# STEP II 1993，第 1 題

純數學 • 組合博弈策略

> **STEP II 1993，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/93-s2-q1

## 關鍵思路

一切都建基於一個點算上的事實。兩位玩家都恰好有 9 可供分配，所以 Betty 不可能在每一塊場地上都與 Adam 打和或勝過他，同時又在其中一塊場地上明確取勝：那樣她至少要用上 $9+1$。因此，每當 Betty 勝出，她必定是恰好贏兩塊場地而輸掉第三塊。掌握了這一點，第一部分就變成一套固定做法，而兩個三元組的部分則變成簡短的分情況討論（case analysis）。

## 解答

全文中，「Betty 贏得場地 $i$」指 $b_i > a_i$，「Adam 贏得場地 $i$」指 $a_i > b_i$，而 $a_i = b_i$ 的場地則為打和。

### 一條引理：Betty 怎樣才能勝出

設 Betty 的三元組（triple）擊敗 Adam 的三元組 $(a_1, a_2, a_3)$，其中 $a_1 + a_2 + a_3 = 9$。

- 她不可能三塊場地全贏，因為那樣需要對每個 $i$ 都有 $b_i \geq a_i + 1$，於是 $b_1 + b_2 + b_3 \geq 12$。
- 假設她恰好贏一塊場地。由於她的得分比 Adam 多，Adam 的得分是 0，所以其餘兩塊場地不是打和就是 Betty 贏。於是對每個 $i$ 都有 $b_i \geq a_i$，而且至少有一處是嚴格不等式（strict inequality），因此 $b_1 + b_2 + b_3 \geq 9 + 1 = 10$。這是不可能的。

她的得分比 Adam 多，所以她至少得一分。因此她恰好贏兩塊場地。所以 Betty 擊敗 $(a_1, a_2, a_3)$ 當且僅當（if and only if）對某一對場地 $i, j$ 有

$$b_i \geq a_i + 1, \qquad b_j \geq a_j + 1,$$

並且她輸掉餘下的場地 $k$。留意輸掉場地 $k$ 是自動成立的，因為 $b_k = 9 - b_i - b_j \leq 9 - a_i - a_j - 2 = a_k - 2$。

### Betty 總能勝出

把場地重新編號，使得 $a_1 \geq a_2 \geq a_3$。那麼 $3a_1 \geq a_1 + a_2 + a_3 = 9$，所以 $a_1 \geq 3$。Betty 放棄 Adam 最強的那塊場地，而在另外兩塊場地上各比他多一：

$$(b_1, b_2, b_3) = (a_1 - 2,\ a_2 + 1,\ a_3 + 1).$$

這些都是非負整數（因為 $a_1 - 2 \geq 1$），而且和為 9。Betty 贏得場地 2 和場地 3，並輸掉場地 1，因為 $a_1 - 2 < a_1$。她得 2 分而 Adam 得 1 分，所以她勝出。

### Adam 可以確保自己永不勝出

取 $(a_1, a_2, a_3) = (9, 0, 0)$。Adam 不可能在場地 2 或場地 3 上得分，因為 $b_2, b_3 \geq 0$。所以他最多得一分，而且只能靠贏得場地 1 來取得，這即是說 $b_1 \leq 8$。在這情況下 $b_2 + b_3 = 9 - b_1 \geq 1$，所以 Betty 在場地 2 或場地 3 上有一個正數項，因而至少得一分。要麼 Adam 得 0 分，要麼他得 1 分而 Betty 至少得 1 分。無論哪種情況，他的得分都不會多於 Betty，所以不論 Betty 怎樣做，他都永不勝出。

（以窮舉搜尋（brute-force search）可知，$(9, 0, 0)$ 及其各種重新排列是具有這個性質的僅有三元組。面對任何其他三元組，Betty 只要作出某個愚蠢的選擇，就會把勝利拱手讓給 Adam。）

### 兩個三元組：$(5, 3, 1)$ 和 $(3, 1, 5)$

我們需要證明沒有任何三元組 $(b_1, b_2, b_3)$ 能同時擊敗這兩者。根據引理，Betty 面對每個三元組都需要贏兩塊場地。

**對** $(5, 3, 1)$。贏得場地 1 和場地 2 要用上 $6 + 4 = 10 > 9$，這是不可能的。所以她必須贏得場地 3，再加上場地 1 或場地 2：

$$b_3 \geq 2 \quad \text{及} \quad (b_1 \geq 6 \ \text{或}\ b_2 \geq 4). \tag{A}$$

**對** $(3, 1, 5)$。贏得場地 1 和場地 3 要用上 $4 + 6 = 10 > 9$，這是不可能的。所以她必須贏得場地 2，再加上場地 1 或場地 3：

$$b_2 \geq 2 \quad \text{及} \quad (b_1 \geq 4 \ \text{或}\ b_3 \geq 6). \tag{B}$$

**想一想** 兩個條件都涉及場地的選擇。我們怎樣把它們合併起來而不遺漏任何情況？

按 (B) 中的第二個選擇分情況討論。

- 若 $b_3 \geq 6$，則 $b_1 + b_2 \leq 3$，所以 $b_1 \geq 6$ 和 $b_2 \geq 4$ 都不可能成立，這與 (A) 矛盾。
- 若 $b_1 \geq 4$，則連同 (B) 中的 $b_2 \geq 2$ 和 (A) 中的 $b_3 \geq 2$，再加上 (A) 中的二擇其一，可得

$$b_1 + b_2 + b_3 \geq 6 + 2 + 2 = 10 \qquad \text{或} \qquad b_1 + b_2 + b_3 \geq 4 + 4 + 2 = 10.$$

  兩者都不可能，因為總和是 9。

每種情況都導致矛盾，所以沒有單一個三元組能同時擊敗 $(5,3,1)$ 和 $(3,1,5)$。Adam 憑這一對三元組勝出，正如所求。

## 驗算

總共只有 $\binom{11}{2} = 55$ 個三元組，所以一切都可以用窮舉法檢查。電腦證實，Adam 的 55 個三元組每一個都被 Betty 上述的做法擊敗，而且每一個致勝的回應都恰好贏兩塊場地。電腦亦列出擊敗 $(5,3,1)$ 的 13 個三元組和擊敗 $(3,1,5)$ 的 13 個三元組，並發現兩張清單沒有共同的三元組。舉一個具體例子，$(4,2,3)$ 以 2–1 擊敗 $(3,1,5)$，但面對 $(5,3,1)$ 時它只贏得場地 3，並輸掉場地 1 和場地 2，所以它以 1–2 落敗。

## 常見錯誤

- 以 $(3,3,3)$ 作為 Adam「永不勝出」的三元組。Betty 可以出 $(2,2,5)$ 而以 1–2 落敗，所以 Adam 憑它是可以勝出的。
- 忘記了 Betty 若只贏一塊場地而勝出，就需要 Adam 一分不得，繼而沒有利用總和 9 來排除這個情況。
- 在兩個三元組的部分，只檢查幾個自然想到的回應，例如 $(6,0,3)$ 或 $(0,2,7)$，而沒有證明任何回應都行不通。

## STEP 之外

布洛托上校博弈（Colonel Blotto）是博弈論（game theory）中的經典。由於 Betty 後行並掌握全部資訊，她總能勝出，所以有趣的版本是讓兩位玩家同時行動。這時通常沒有

最佳的純策略（pure strategy），而解答是一個混合策略（mixed strategy）：三元組上的一個概率分佈（probability distribution），其存在由馮紐曼（von Neumann）的極小極大定理（minimax theorem）保證。本題中兩個三元組的變體是朝這個方向邁出的第一步，因為 Adam 的最佳防守就是把他的選擇分散到幾個三元組上。想做同類精神的題目，可參閱 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（高等數學難題集）。至於支撐混合策略的概率工具，可參閱 Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率入門）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。