詳細解答

STEP I 1993，第 9 題

純數學 • 一階微分方程

> **STEP I 1993，第 9 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/93-s1-q9

關鍵思路

這是一道混合問題（mixing problem）：缸內 A 的份量的變化率等於（流入率）減（流出率），而由於混合得很快，流出的液體與缸內液體的濃度相同。首先要留意的是，每個缸的總體積始終不變，所以濃度不過是「A 的份量除以一個常數」。於是每個缸各給出一條一階線性方程（first-order linear equation），而第一個缸的輸出就成為第二個缸的強迫項（forcing term）。

解答

第一個缸

液體以總流率每秒 $a + (b - a) = b$ 升流入第一個缸，並以每秒 b 升流出，所以對所有 $t \geq 0$，缸內體積一直保持在初始值 K 升。

由於混合得很快，在時間 t 缸內液體是均勻的，其中化學品 A 所佔的比例為 $V(t)/K$。在一段短時間 δt 內，有 $a\,\delta t$ 升的 A 流入，並有 $b\,\delta t$ 升的混合液流出，其中 $\frac{V}{K}\,b\,\delta t$ 升是 A。因此

$$\delta V \approx a\,\delta t - \frac{bV}{K}\,\delta t,$$

兩邊除以 δt，再令 $\delta t \to 0$，得

$$\dot{V}(t) = -\frac{bV(t)}{K} + a,$$

這正是所求的方程。

這是一條常係數線性方程。把它寫成 $\dot{V} + \frac{b}{K}V = a$，再乘以積分因子（integrating factor）

$\mathrm{e}^{bt/K}$，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(V\mathrm{e}^{bt/K}\right) = a\,\mathrm{e}^{bt/K} \quad\Longrightarrow\quad V\mathrm{e}^{bt/K} = \frac{aK}{b}\mathrm{e}^{bt/K} + C.$$

最初缸內只有化學品 B，所以 $V(0) = 0$，由此得 $C = -\frac{aK}{b}$。因此

$$V(t) = \frac{aK}{b}(1 - \mathrm{e}^{-bt/K}), \qquad t \geq 0,$$

正如所求。

第二個缸

第二個缸每秒從第一個缸接收 b 升液體，並以每秒 b 升排出，所以它的體積保持在 L 升。設 $W(t)$ 為時間 t 時缸內 A 的體積，則 $W(0) = 0$。

> **想一想** 化學品 A 以甚麼速率流入第二個缸？

它流入的速率恰好就是它離開第一個缸的速率，即 $\frac{bV}{K} = a(1 - \mathrm{e}^{-bt/K})$。根據同樣的快速混合論證，它以速率 $\frac{bW}{L}$ 流出。所以

$$\dot{W} + \frac{b}{L}W = a - a\,\mathrm{e}^{-bt/K}.$$

乘以積分因子 $\mathrm{e}^{bt/L}$，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(W\mathrm{e}^{bt/L}\right) = a\,\mathrm{e}^{bt/L} - a\,\mathrm{e}^{bt(1/L - 1/K)}.$$

因為 $L \neq K$，指數 $b(\frac{1}{L} - \frac{1}{K}) = \frac{b(K-L)}{KL}$ 不等於零，所以第二項可以當作指數函數來積分：

$$W\mathrm{e}^{bt/L} = \frac{aL}{b}\mathrm{e}^{bt/L} - \frac{aKL}{b(K-L)}\mathrm{e}^{b(K-L)t/(KL)} + D.$$

全式乘以 $\mathrm{e}^{-bt/L}$，並注意到 $\frac{b(K-L)}{KL} - \frac{b}{L} = -\frac{b}{K}$，

$$W = \frac{aL}{b} - \frac{aKL}{b(K-L)}\mathrm{e}^{-bt/K} + D\mathrm{e}^{-bt/L}.$$

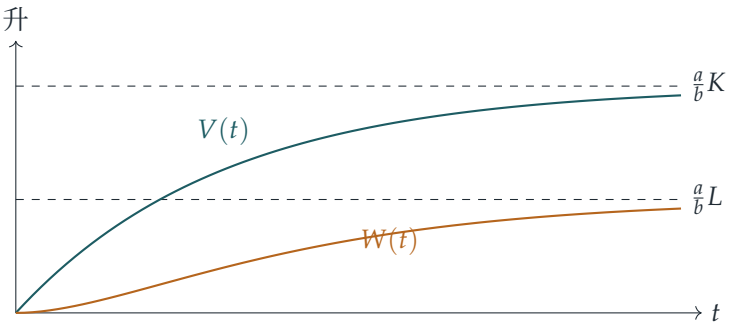
代入 $W(0) = 0$：

$$D = \frac{aKL}{b(K-L)} - \frac{aL}{b} = \frac{aL}{b}\cdot\frac{K - (K-L)}{K-L} = \frac{aL^2}{b(K-L)}.$$

所以在時間 $t \geq 0$，第二個缸內有

$$\boxed{W(t) = \frac{aL}{b}\left(1 - \frac{K\mathrm{e}^{-bt/K} - L\mathrm{e}^{-bt/L}}{K-L}\right)}$$

升化學品 A。



草圖取 $a=1$、$b=2$、$K=10$、$L=5$。留意 W 起初的斜率為零：一開始從第一個缸流來的液體中幾乎沒有 A。

驗算

- 在 $t=0$ 時，括號內的值為 $1-\frac{K-L}{K-L}=0$，理應如此。另外 $\dot{W}(0)=0$，與 A 以速率 $bV(0)/K=0$ 流入這一事實吻合。
- 當 $t\to\infty$ 時，$V\to\frac{a}{b}K$ 而 $W\to\frac{a}{b}L$：兩個缸內 A 的濃度最終都是 a/b，即流入液體的濃度。
- 除了前面的因子 L 之外，公式對 K 和 L 是對稱的，這正好可以用來檢查代數運算是否前後一致。
- 取 $a=1$、$b=2$、$K=10$、$L=5$、$t=5$：$V=5(1-\mathrm{e}^{-1})\approx 3.1606$，而 $W=2.5(1-\mathrm{e}^{-1})^2\approx 0.99894$。對兩個缸進行數值模擬（同時追蹤體積），在多組隨機選取的 a,b,K,L 之下，結果與兩條公式相符，誤差約為 10^{-13}。

常見錯誤

- 把 A 的流出率當作 $b-a$ 或 a：流出率應是總流出率乘以濃度。
- 把 A 流入第二個缸的速率當作 a：只有離開第一個缸的 A 才會到達第二個缸。
- 忘記為何需要 $L\neq K$：若 $L=K$，強迫項 $\mathrm{e}^{-bt/K}$ 是齊次方程（homogeneous equation）的解，答案會改為含有 $t\,\mathrm{e}^{-bt/K}$ 一項。

STEP 之外

一連串充分混合的缸是標準的房室模型（compartment model），可用來描述藥物劑量在體內的流動，以及放射性衰變鏈。把它寫成方程組 $\dot{\mathbf{x}}=M\mathbf{x}+\mathbf{f}$ 後，衰減率 b/K 和 b/L

就是 M 的特徵值（eigenvalue），而 $L = K$ 的情況就是重特徵值，也就是產生 $t\,\mathrm{e}^{\lambda t}$ 形式的解的那種「共振」（resonance）。Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（初等微分方程教科書）正是以這種方式處理混合問題和線性方程組。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。