詳細解答

STEP I 1993，第 8 題

純數學 • 球面與向量

> **STEP I 1993，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/93-s1-q8

關鍵思路

在第 (i) 部分，把原點和坐標軸放在具有對稱性的位置。如果球心位於 z 軸上，而平面是 $z = 0$，那麼方程幾乎會替我們完成所有工作。兩個球面的情況也不會更難，因為把兩者的方程相減，所有平方項都會抵消，剩下的是一個平面的方程。在第 (ii) 部分，坐標同樣把一切化為純量積（scalar product）的計算。把 B 放在原點，這樣兩根桿的頂端都可以由 E 量起。

解答

第 (i) 部分

球面與平面。設球面（sphere）的球心為 O'，半徑為 $r > 0$，並設 N 為由 O' 至平面的垂足（foot of the perpendicular）。取 N 為原點，平面為 $z = 0$，並令 z 軸沿 NO' 方向。於是 $O' = (0, 0, d)$，其中 $d \geq 0$ 是球心到平面的距離。球面的方程是

$$x^2 + y^2 + (z - d)^2 = r^2,$$

所以一點同時位於球面和平面上，當且僅當 $z = 0$ 並且

$$x^2 + y^2 = r^2 - d^2.$$

- 若 $d < r$，這是平面上以 N 為圓心、半徑為 $\sqrt{r^2 - d^2}$ 的圓。
- 若 $d = r$，則 $x^2 + y^2 = 0$ 迫使 $x = y = 0$，所以交集只有 N 一點（該平面是切平面（tangent plane））。
- 若 $d > r$，右方為負數，所以沒有任何點符合條件，交集是空集。

這幾種情況涵蓋了所有可能，第一個命題因而得證。

兩個球面。設兩個球面的半徑為 $r, s > 0$，球心相異，相距 $c > 0$。把第一個球心放在原點，第二個放在 $(0, 0, c)$：

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \qquad x^2 + y^2 + (z - c)^2 = s^2.$$

? **想一想** 兩個二次方程的解集，怎麼可能只是一個圓？

把第一個方程減去第二個方程。所有平方項都會抵消，剩下

$$2cz - c^2 = r^2 - s^2 \quad \Longleftrightarrow \quad z = h, \qquad \text{其中} h = \frac{r^2 - s^2 + c^2}{2c}.$$

由於兩個球心相異，所以可以除以 c。一點同時位於兩個球面上，當且僅當它位於第一個球面上並且滿足相減所得的方程，所以

$$(\text{球面 1}) \cap (\text{球面 2}) = (\text{球面 1}) \cap (\text{平面} z = h).$$

根據第一個結果，這是一個圓、一點或空集。（明確地說，當 $|h| < r$ 時，它是平面 $z = h$ 上的圓 $x^2 + y^2 = r^2 - h^2$；當 $|h| = r$ 時是單獨一點；當 $|h| > r$ 時是空集。）這個圓所在的平面垂直於連心線（line of centres），而圓心就在這條線上。

第 (ii) 部分

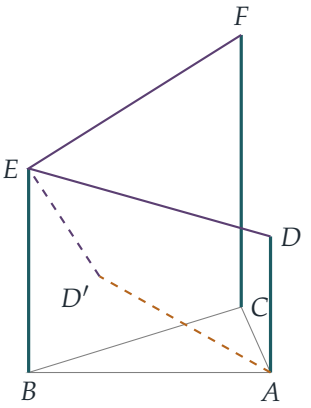
關於底部位置的假設。題目沒有說明 A、B 和 C 的位置。我們假設它們位於水平地面上一個邊長為 2 m 的等邊三角形（equilateral triangle）的頂點。這個佈局能得出題目所述的角（見「驗算」）。

取 B 為原點，z 軸為鉛垂方向：

$$B = (0, 0, 0), \quad A = (2, 0, 0), \quad C = (1, \sqrt{3}, 0),$$

因此各桿的頂端是

$$D = (2, 0, 2), \quad E = (0, 0, 3), \quad F = (1, \sqrt{3}, 4).$$



圖中的 D'（虛線）是破壞者移動桿子之後 D 的位置。

原來的雕塑。使用由 E 出發的向量（vector），

$$\overrightarrow{ED} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix},$$

所以 $\overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{EF} = 2 + 0 - 1 = 1$，而 $|\overrightarrow{ED}| = |\overrightarrow{EF}| = \sqrt{5}$。因此

$$\cos \angle DEF = \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{1}{5}, \qquad \text{所以} \qquad \angle DEF = \cos^{-1} \tfrac{1}{5},$$

正如所求。

破壞者動手之後。桿 AD 的長度仍然是 2，底端仍然在 A。它現在位於通過 A 和 B 的鉛垂平面（即平面 $y = 0$）之內，向 B 傾斜，與地面成 $\frac{1}{4}\pi$ 角。由 A 走向 B 就是 $-x$ 的方向，所以

$$D' = \left(2 - 2\cos \tfrac{\pi}{4},\, 0,\, 2\sin \tfrac{\pi}{4}\right) = \left(2 - \sqrt{2},\, 0,\, \sqrt{2}\right).$$

由於 $2 - \sqrt{2} \approx 0.59$ 介乎 0 與 2 之間，點 D' 確實在線段 AB 的上方。現在

$$\overrightarrow{ED'} = \begin{pmatrix} 2 - \sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} - 3 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{ED'} \cdot \overrightarrow{EF} = (2 - \sqrt{2}) + (\sqrt{2} - 3) = -1,$$

並且

$$|\overrightarrow{ED'}|^2 = (2 - \sqrt{2})^2 + (3 - \sqrt{2})^2 = (6 - 4\sqrt{2}) + (11 - 6\sqrt{2}) = 17 - 10\sqrt{2}.$$

? **想一想** 點積（dot product）是負數。這告訴我們這個角有甚麼特點？

純量積為負，表示這個角是鈍角（obtuse angle），所以我們需要的是介乎 $\frac{1}{2}\pi$ 與 π 之間的 $\cos^{-1}$ 值：

$$\cos \angle D'EF = \frac{-1}{\sqrt{5}\sqrt{17 - 10\sqrt{2}}} = \frac{-1}{\sqrt{85 - 50\sqrt{2}}} \approx -0.264542,$$

$$\angle D'EF \approx 1.839 \text{ 弧度（準確至四位有效數字）}.$$

驗算

- 若底部是邊長為 s 的等邊三角形，用同樣的方法可得 $\cos \angle DEF = \dfrac{s^2/2 - 1}{s^2 + 1}$。只有當 $s = 2$ 時，這個值才等於 $\frac{1}{5}$，這支持了我們對底部所作的假設。數值驗算確認當 $s = 2$ 時 $\cos \angle DEF = 0.2$。

- 已用數值方法驗算 $|AD'| = 2$ 和 $\angle BAD' = \frac{1}{4}\pi$。新的角算得為 1.838525… 弧度（約 105.3°），與上面的精確形式吻合。
- 第 (i) 部分：以隨機選取的球面作測試，並在預測的圓上取點；這些點都在兩個曲面上，誤差在 10^{-12} 以內。

常見錯誤

- 在兩個球面的情況中，聲稱兩個方程之差就是交集。該平面只是包含了交集；我們仍然要求出這個平面與其中一個球面的交集。
- 把 D' 放在 A 的另一側，即遠離 B 的一方。該點並不在線段 AB 的上方，而且會得出不同的角。
- 以度數作答，或者因為漏掉負號而把答案寫成銳角 $\cos^{-1}(0.2645)$。

STEP 之外

把兩個球面的方程相減而得到一個平面，正是兩個圓或兩個球面的*根平面*（radical plane；在二維的情況則是根軸（radical axis））背後的想法。同樣的技巧可以把 GPS 式的三邊測量（trilateration）化為線性問題。更一般地說，任何二次曲面（quadric surface）與平面的交集都是圓錐曲線（conic），而為這類交集分類，是利用二次型（quadratic form）學習線性代數（linear algebra）的一個很好的入門練習。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門）建立了所需的工具，而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（高等數學難題）則有更多 STEP 風格的坐標幾何題目。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。